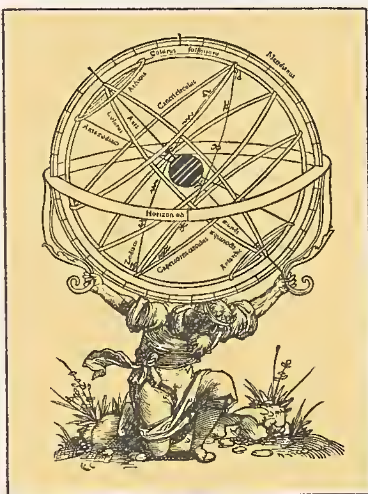


HIERONYMI CARDANI, PRÆSTANTISSIMI MATHEMATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,

ARTIS MAGNÆ,

SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,

Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod

OPVS PERFECTVM

inſcripſit, eſt in ordine Decimus.



HAbes in hoc libro, ſtudioſe Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Coſſa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonſtrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam ſeptuaginta euaſerint. Neq; ſolum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni ęquales fuerint, nodum explicant. Hunc aũt librum ideo ſeorſim edere placuit, ut hoc abſtruſiſſimo, & planè inexhauſto totius Arithmeticæ theſauro in lucem eruto, & quaſi in theatro quodam omnibus ad ſpectandum expoſito, Lectores incitarẽtur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore faſtidio perdiſcant.

HIERONYMVS
CARDANVS MEDICVS ANDREÆ
Osiandro uiro eruditiss. S. P. D.


IHIL tam animo unquam uersaui, Andrea doctiss. quàm ut eorum, qui de bonis literis bene merentur, nomina posteritati commendarem. Tum uero præcipuam quandam diligentiam adieci, si tales cum eruditione humanitatem coniunxissent. Quamobrem cum te non solum Hebræarum, Græcarum, ac Latinarum literarum scientiam haud mediocrem, sed etiam Mathematicarum habere intelligam, humanissimum quoque semper expertus sim, uisum est, hoc meum opus, nulli melius posse dedicari, quàm tibi, à quo posit & emendari, (si manus mea imperium mentis transgressa fefellisset) & legi cum uoluptate, & intelligi, tum uero etiam cum authoritate commendari. Hoc exemplum, nisi fallor, & alij sequentur, ac opera sua, non nisi in ea quam tractant arte eruditis dedicabūt. Accipe ergo amoris erga te mei, & officij in me tui, tum præclaræ simul eruditionis tuæ perpetuum testimonium. Et quanquam tu talis sis, quem tua uirtus omnibus notum faciat, tamen cum Alexander, & Cæsar, factis suis notissimi, aliorum monumentis inscribi desiderauerint, cumque Plato, qui mira illa per sese conderet, aliorum tamen scriptis laudari concupiuerit, spero meum hoc qualecunque officium tibi quoque non ingratum esse futurum, quòd & in his fortuna quædam dominetur, pereantque meliora sæpe, seruatis deterioribus. Et sit modo de hoc qualecunque iudicium tuum, certum mihi tamen est, officio meo me satisfacere debere. Atque utinam contingat illustriore exemplo, animum meum erga omnes ostendere, qui eo animi candore sunt, quo te in studiosos nostri temporis fuisse semper agnoui.

Sed dabitur forsan occasio melior, etsi non detur, hanc tamen, qualiscunque sit, perijsse mihi nolim. Vale. v. Idus Ianuarias. M. D. XLV. Papiæ.

INDEX EORVM QVÆ IN HOC LIBRO CONTINENTVR.

Errata quædam sic corrigito.

Fol. 5. facie 2. uersu 28. lege 6 quadratis p: 3.
Fol. 8. facie 2. uersu ultimo. reliquas.
Fol. 9. facie 2. uersu 34. superficiem.

ARS MAGNA, QVAM VVLGO COSSAM VOCANT, SIVE REGVLAS ALGEBRAICAS, PER D. HIERONYMVM Cardanum in Quadraginta Capitula redacta, & est Liber Decimus sui Arithmeticæ.

De duabus æquationibus in singulis capitulis. Cap. I.



HÆC ars olim à Mahomete, Mosis Arabis filio initium sumpsit. Etenim huius rei locuples testis Leonartus Pisauriensis est. Reliquit autē capitula quatuor, cum suis demonstrationibus, quas nos locis suis ascribemus. Post multa uero temporum interualla, tria capitula deriuatiua addita illis sunt, incerto authore, quæ tamen cum principalibus, à Luca Pacciolo posita sunt. Demum etiam ex primis, alia tria deriuatiua, à quodam ignoto uiro inuenta legi, hæc tamen minime in lucem prodierant, cum essent aliis longe utiliora, nam cubi & numeri & cubi quadrati æstimationē docebant. Verum temporibus nostris, Scipio Ferreus Bononiensis, capitulum cubi & rerum numero æqualium inuenit, rem sanè pulchram & admirabilem, cum omnem humanam subtilitatem, omnis ingenii mortalis claritatem ars hęc superet, donum profectò celeste, experimentum autem uirtutis animorum, atque adeò illustre, ut qui hæc attigerit, nihil nō intelligere posse se credat. Huius ęmulatiōe Nicolaus Tartalea Brixellensis, amicus noster, cū in certamē cū illius discipulo Antonio Maria Florido uenisset, capitulum idem, ne uinceretur, inuenit, qui mihi ipsum multis precibus exoratus tradidit. Deceptus enim ego uerbis Lucæ Paccioli, qui ultra sua capitula, generale ullū aliud esse posse negat. quanque tot iam antea rebus à me inuentis, sub manibus esset, desperabam tamen inuenire, quod quærere non audebam Inde autem, illo habito, demonstrationē uenatus, intellexi complura alia posse haberi. Ac eo studio, auctaque iam confidentia, per me partim, ac etiam aliqua per Ludouicum Ferrarium, olim alumnum nostrum, inueni. Porrò quæ ab his inuenta sunt, illorum nominibus decorabuntur, cætera, quæ nomine carent, nostra sunt. At etiam demonstrationes, præter tres Mahometis, & duas Lodouici, omnes nostræ sunt, Singulæque capitibus suis præponentur, inde regula addita, subiicietur experimētum. Et quanque longus sermo de his haberi posset,

ſet,ac innumera capitulorum ſeries ſubiungi,finem tñ exquiſitæ con ſiderationi in cubo faciemus,cætera,etiã ſi generaliter, q̃ſi tamen per tranſennam tractantes. nanq; cũ poſitio lineam, q̃dratum ſuperficiẽ, cubus corpus ſolidũ referat,næ utiq; ſtultũ fuerit, nos ultra progredi,quo naturæ nõ licet. Itaq; ſatis pfecte docuiſſe uidebitur,qui oĩa, quæ uſq; ad cubum ſunt,tradiderit,reliq̃ quæ adijcimus, quaſi coacti aut incitati,nõ ultrà tradimus. In omnibus autẽ præcedentium, ac maxime librorũ tertij ac quarti,meminiſſe operæprecium fuerit, ne uel iterum tradendo nugax efficiar,aut obſcurior prætermittendo.

2 Iam eñ docuiſſe nos meminimus,quę ſint impares,aut pares denominationes. Nanq; q̃dratum,& q̃dratum q̃drati, cubumq́; quadrati,ac deinceps una ſemper intermiſſa.Pares, rem aũt ſeu poſitionem,cubum,primum ac ſecundum nomen,impares uocamus denominationes. At uero quòd tam ex 3,quàm ex m: 3,fit 9,quoniam minus in minus ductũ pducit plus. At in imparibus denominationib9 eadẽ ſeruatur natura:nec plus niſi ex uero numero fiet:nec cubus,cuius æſtimatio ſua ſit m:ſeu quòd dicimus debitũ,ex poſitione ulla numeri ueri pduci poteſt,iam meminiſſe oportet dilucidius explicatũ.

3 Si igitur par denominatio,numero æqualis ſit,rei æſtimatio duplex eſt,m:& p:alteraq́; alteri æq̃lis,uelut,ſi q̃dratum æquetur 9, res eſt 3,uel 3 m:& ſi æquetur 16,res eſt 4,uel m: 4,& ſi q̃dratum q̃drati ęquetur 81, rei ęſtimatio eſt 3,uel m: 3.Cõponere autem pares denominationes nõ eſt admodum neceſſarium,quia q̃d. quadratum ad deriuatiua capitula pertinet,uerũ ſi diligenter hæc,quæ ſcribam,animaduerteris,cũ hac regula etiam uoto tuo ſatisfacies,nam cum q̃dratum & q̃dti q̃dratũ numero æquantur,eadem erit ratio,quę in ſimplici,duplex ęquatio ſcilicet,altera p: altera m:inuicemq́; ęq̃les,uelut 1, q̃dti q̃dratum p: 3 q̃dratis æquantur 28,poſitio ualet 2 uel 2 m: At uero,ſi q̃dti q̃dratũ & numerus,ęqualia ſint q̃dratis,demonſtrabimus ſanè in capitulo octauo,duas eſſe rei ęſtimationes ueri numeri,totidem aũt habebit per m: ſingulas ſingulis correſpondentibus æq̃les, uelut ſi dicam 1 q̃dti q̃dm p: 12,æquatur 7 q̃dratis, poſitionis æſtimatio eſt, uel 2, uel m: 2,uel R 3,uel m: R 3, & ſic ſunt q̃tuor æq̃tiones. Quòd ſi caruerit ęſtimatiõe uera,carebit etiam ea,quę eſt per m: uelut 1 q̃dti q̃dm p: 12,æq̃tur 6 q̃dtis,quia non poteſt æquationẽ ueram habere,carebit etiam ficta,ſic eñ uocamus eam,quæ debiti eſt ſeu minoris. At uero ſi q̃d.q̃dm numero & q̃dratis æquale ſit, una ſemper eſt rei uera æſtimatio,altera ei æqualis,ficta, uel per m: uelut 1 q̃dti q̃dm æquetur 2 q̃dratis p: 8,rei ęſtimatio eſt 2,uel m: 2.Eadem igitur ratio in cæte

ris paribus omnibus denominationibus inter ſe,cũ numero iungunt, at hoc per depreſsionem quomodo fiat,in 4° libro plene docuimus.

At imparium denominationum , una tantum æquatio uera eſt, nulla ficta,cũ ſolæ numero cõparantur,uelut duæ res æquantur 16, æſtimatio rei eſt 8,duo cubi æquantur 16,æſtimatio rei eſt 2, ſemper autem numerus cui comparantur denominationes , in hoc capitulo uerus,non fictus ſupponitur,quid enim tam ſtultum , quàm fundamentum ipſum infirmare,quanq; tamen ratio oppoſita , in oppoſitis eſſet perſequenda,eadem igitur eſt ratio,ubi plures denominationes numero comparantur,etiamſi mille forent,una erit æſtimatio rei uera,& nulla ficta,uelut 1 cubus p:6 poſitionibus,æquatur 20, rei æſtimatio nulla eſt præter 2,neq; uera neq; ficta. 4

Cum uero duæ denominationes cum numero comparantur, aut ambæ impares, & comparatio fiet ad extremam,uel ad mediam,nam de ea quæ fit ad numerum,iam in præcedenti regula dictum eſt, uel altera impar,altera par,nam de utraq; pari,in tertia regula generaliter diximus. Si igitur extrema denominatio,cubus ſcilicet, cũ numero mediæ,id eſt poſitionibus comparetur, uide an ex duabus tertijs numeri Rerum in radicem tertiæ partis eiuſdem numeri fiat ducendo,numerus propoſitus aut maior , aut minor,ſi igitur fiat numerus propoſitus præciſe,æſtimatio rei eſt duplex,& una uera,ſcilicet ℞ ipſa,quæ ducta eſt. Exemplum,cubus p:16,æquatur 12 poſitionibus, ducto igitur 8,qui eſt $\frac{2}{3}$ de 12,numero rerum,in 2 radicem 4,qui eſt $\frac{1}{3}$ numeri rerũ,fit 16,numerus æquationis propoſitus, æſtimatio igitur eſt 2,radix 4,& alia eſt ęſtimatio ficta, & eſt correſpondens uerę, cubi æqualis eiſdem rebus,& eidem numero,ut in exemplo, ſi cubus æquatur 12 rebus, p:16 numero,uera æſtimatio eſt 4,igitur ſi cubus p:16 ęquatur 12 poſitionibus,ęſtimatio rei eſt m:4, nam 12 res ſunt m:48,& cubus m:4 eſt m:64,cui addito 16, fit m: 48. Quod ſi productum ex $\frac{2}{3}$ numeri rerum in ℞ tertiæ partis eiuſdem numeri,ſuperet numerũ æquationis propoſitũ, tunc capitulum habebit tres æquationes,duas ueras,& tertiam fictam. Exemplũ,1 cubus p:9, ęquetur 12 rebus,una æquationum uera eſt 3,alia ℞ 5 $\frac{1}{4}$ m: 1 $\frac{1}{2}$, tertiam ficta ex his ſemper aggregatur,& reſpondet æſtimationi cubi ęqualis eiſdem rebus & eidem numero ueræ,& eſt ℞ 5 $\frac{1}{4}$ p: 1 $\frac{1}{2}$ & ita reliqua ficta,de qua diximus,in alio exẽplo , aggregatur ex duabus ueris, ſed quia ueræ ſunt inuicẽ æquales,ideo ficta ſemper dupla eſt ueræ. Manifeſtum eſt igitur,quòd falſæ æquationes ſeu fictæ , capituli cubi & numeri æqualium rebus,reſpondent æquationibus ueris capituli cubi æqua- 5

bi æqua-

bi æqualis rebus & numero, ubi res & numerus sint idẽ. At uero ubi ex tali multiplicatione ℞ tertiæ partis numeri rerum, in duas tertias eiusdem numeri fiat minus numero proposito, tũc nulla erit æquatio uera sed una ficta, æqualis ueræ capituli cubi æqualis totidem rebus & eidẽ numero, uelut 1 cubus p: 21 æquatur 2 rebus, quanquam careat uera equatione, ficta tamen est m: 3, & hæc est æstimatio uera cubi æqualis duabus rebus ac numero uiginti uno.

6 Ex his non difficile est uenari, quot æquationes habeat capitulũ cubi æqualis rebus & numero. Si igitur ex $\frac{2}{3}$ numeri rerum in radicem tertiæ partis eiusdem, fit numerus propositus, capitulum habet duas æquationes, ueram æqualem fictæ præcedentis regulæ, & fictã æqualem ueræ, ideo uera est dupla fictæ, quia ibidem ficta est dupla ueræ, ut 1 cubus æquatur 12 rebus & 16 numero, æquatio uera est 4, & ficta est m: 2, quia si 1 cubus p: 16, æquatur 12 positionibus, æstimatio uera est 2, & ficta m: 4. Quod si ex dicta multiplicatione, proueniat plus numero æquationis, æstimatio uera erit una, respondens falsæ præcedentis regulæ, & falsa duplex, utraque respondens ueræ, præcedentis regulæ, ut si cubus æquetur 12 positionibus p: 9, æstimatio falsa utraque est, ℞ 5 $\frac{1}{4}$ m: 1 $\frac{1}{2}$ m: & 3 m: & uera est ℞ 5 $\frac{1}{4}$ p: 1 $\frac{1}{2}$, & ita uides, qualiter falsæ ueris, & ueræ falsis sibi inuicem respondent, ex ambabus autem falsis cõflatur uera, nam ex ℞ 5 $\frac{1}{4}$ m: 1 $\frac{1}{2}$ & 3, fit ℞ 5 $\frac{1}{4}$ p: 1 $\frac{1}{2}$. Quod si ex tali producto fiat minus numero æq̃tionis, æstimatio est una tantũ, & uera, sicut in precedenti regula est una tantũ, & ficta, uelut si cubus æq̃lis sit duabus rebus & 21 numero, æquatio est 3, sicut in cubo p: 21 æquali duabus rebus æstimatio ficta est m: 3.

7 In capitulis aũt in quibus æquantur inuicem numerus & denominatio par & impar, aut par est extrema, ut quando q̃d^m & positio, & numerus æquantur inuicem aut denominatio extrema est impar, ut quando cubus & q̃d^m æquantur numero, si igitur q̃d^m æquatur positionibus & numero, habebit duas æquationes, unam ueram æq̃lem fictæ, capituli q̃drati & rerũ earundem æq̃lium eidẽ numero, & aliam fictam eq̃lem uere alterius capituli. Exemplũ, Si q̃d^m & 4 positiones, æquantur 21, æstimatio uera est 3, & ficta m: 7, & si q̃d^m æquatur 4 positionibus, & 21, estimatio uera est 7, & ficta m: 3, ideo habitis ueris, mutuo habentur fictæ, quemadmodum in præcedenti regula, sed diuerso modo, nam hic extrema extremis, ibi media extremis comparantur. Nam ibi capitulum cubi & numeri æq̃lis rebus, cõparatur capitulo cubi equalis rebus & numero, hic capitulum q̃drati & rerum æqualium numero, cõparatur capitulo q̃d^ti æq̃lis rebus & numero.

At

At quando quadratū & numerus æquantur rebus, & caſus eſt poſſi-
bilis, tunc ſunt duæ ſolutiones ueræ, ut dicendo quad^{m} p: 12. æqua-
tur 7 poſ^{b}, poſitio poteſt eſſe 4. uel etiam 3. nam in utroq; uerifi-
catur, niſi quando numerus eſt æqualis quadrato dimidij numeri ra-
dicum, nam tunc ſolum eſt una ęquatio, ſcilicet dimidium numeri ipſa
rum radicū. In hoc autem capitulo nunquam poteſt eſſe ſolutio ficta, nec
æquatio per minus. ſed ubi eſt ſolutio per uerum numerum, eſt du-
plex, ubi caret ſolutione uera, nō tamen magis poteſt ſolui per æqua-
tionem fictam.

Si uero ęquatio quæratur in capitulis cubi, quadratorum, & nume 8
ri, tunc ſi cubus æquatur quadratis & numero, tunc eſt una tantum ſo
lutio uera, uelut ſi dicam, cubus æquatur tribus quadratis p: 16. res
ualet 4. & non poteſt alia inueniri.

NOTANDVM. In omnibus autem capitulis in quibus eſt una tan- Not^{m}.
tum ſolutio, æquatio eſt facilior inuentu, & nitidior, uelut in capitulo
cubi & rerum æqualium numero, & cubi æqualis quadrato & nume-
ro, & in capitulo cubi æqualis rebus & numero, ubi productio illa ex
$\frac{2}{3}$ numeri in R tertiæ partis eſt minor numero. Idem dico, ubi cubus
cum numero æquatur rebus, & non poteſt haberi niſi ficta æquatio,
reliquæ autem in quibus multiplex eſt æſtimatio rei, ſunt difficiliores
& confuſæ.

Si igitur cubus & quadratum, æquantur numero, tunc æſtimatio
rei eſt una tantū per plus, ubi ex $\frac{1}{3}$ numeri quad^{ri} in quadratum dua-
rum tertiarum eiuſdem numeri fiat minus numero æquationis, & hæc
æſtimatio eadem eſt fictæ, correſpondenti capitulo cubi & numeri
æqualium quadratis ſub eadem quantitate. Exemplū. Cubus & tria
quadrata æquantur 20, tunc quia ex 1 tertia parte nnmeri quadrato-
rum, in 4 quadratū duarum tertiarum fit minus quàm 20, dico quod
non eſt niſi una æquatio, & res ualet 2, & hęc eſt æſtimatio per m: cu-
bi p: 20, ęqualis tribus quadratis. Vbi uero ex ea multiplicatiōe talis
numerus poſſit produci, erit una æſtimatio uera, & duæ fictæ, & uera
correſpondebit fictę alterius capituli, & rurſus fictæ ueris. Exemplū,
ſi dico, cubus & 11 quadrata æquantur 72, res eſt R 40 m: 4, pro ue-
ra æſtimatione, ſed pro ficta eſt 3 m: uel R 40 p: 4 m: Et ſi cubus cum
72 æqualis ſit 11 quadratis, æſtimationes ueræ ſunt 3. uel R 40 p: 4.
& ficta eſt R 40 m: 4 m: Ideo quærendo fictam ſemper quærimus ue-
ram, & correſpondentem alterius capituli.

Notum eſt autem ex hoc, quod capitula quædam habent duas, Not^{m}.
quædam unam æſtimationem, & quando habet tres, in una parte ca-

 pituli,

pituli, habent postmodum unam tantum in reliqua, uelut capitulum cubi æqualis rebus & numero in parte inferiore, & capitulum cubi & quadratorũ ęqualium numero, & capitulum cubi & numeri ęqualium quadratis aut rebus, nam in una parte habent tres æquationes, in alia unam tantum, & similiter capitulum quad'quadrati & numeri æqualium quadrato: in una parte habet quatuor æquationes, in alia postmodum nullam, quædam uero habent duas per totum, ut capitulum quadrati & rerum æqualium numero, aut capitulum quadrati æqualis rebus & numero, quæ uero habent unam, sunt, ut capitulum cubi & rerum æqualium numero, & capitulum quadrati & numeri æqualium rebus, quod habet duas æquationes in una parte, in alia postmodum nullam.

not^{m}. Et scias, quod æquationes capitulorum, cubi & quadratorum ęqualium numero, item cubi & numeri æqualium quadratis, sic se habent, quod differentia æquationum uerarum & fictarum semper est numerus quadratorum, uelut, si cubus & 72 æquantur 11 quadratis, æquatio ficta est R 40 m: 4, ueræ sunt R 40 p: 4. & 3. differentia, R 40 m: 4 & 7 p: R 40. est 11 numerus quadratorum, & ita, si cubus & 11 quadrata æquentur 72 numero.

9 In his autem capitulis, quæ duplici denominatione, impari & una pari ac numero constant, si cubus & res, æquales sint, quadratis & numero, æquationes possunt esse tres, & omnes ueræ, & nulla ficta, quia ut dictum est, minus cum ad solidum deducitur, fit minus, & ita minus æquale esset plus, quod esse non potest.

Vbi uero cubus, quadratũ, & res, æquales sint numero, tunc tres etiam erunt æquationes, altera p: duæ m: & hoc, si sub eisdem denominationibus quadrata æquari possunt rebus numero & cubo, & æquationes ueræ hic, sunt fictæ in illo exemplo, 1 cu^{b9} p: 6 quad^{tis}, 3 rebus, ęquatur 18, tunc rei uera æstimatio habetur ex capitulo suo, deinde habet æstimationes fictas capituli, 1 cub. p: 3 rebus p: 18 æqualium 6 quadratis, & una earum est 3, alia R $8\frac{1}{4}$ p: $1\frac{1}{2}$, igitur m: 3. uel m: R $8\frac{1}{4}$ p: $1\frac{1}{2}$. est æstimatio ficta, 1 cub. p: 6 quad^{tis} p: 3 pos^{b9} æqualium 18. & cum hoc est etiam tertia æquatio uera.

Ex hoc habentur tres æquationes capituli, cubi, rerum, & numeri, æqualium quadratis, ubi æquatio possibilis, cognoscitur autẽ hoc ex suis capitulis, earum igitur duæ ueræ sunt & æquales, ut dictũ est, æquationibus capituli totidem quadratorũ & rerum & cubi æqualiũ numero eidem, ut in exemplo dicto, tertia autem ueræ respondet alterius capituli, & est ficta, ideo æquatio capituli 1 cu^{bi} p: 6 quad^{tis} p: 3 pos^{b9},

poſ$^{b\bar{a}}$ uera eſt æquatio per m: capituli, 1 cu^{bi} p: 3 rebus p: 18 æqualiũ 6 quadratis. At ubi quadratorum numerus minor ſit quàm ut poſsit æquari cubo rebus & numero, in capitulo cubi quadratorũ rerum æqualium numero, tunc una eſt æquatio uera nulla ficta, at in capitulo quadratorum æqualium cubo rebus & numero, una ficta, & nulla uera, uelut dicendo, 1 cub. p: 1 quad^{to} p: 2 rebus æquantur 16, rei uera æſtimatio eſt 2, & hæc eſt ficta æquatio cubi & duarum rerum & 16 æqualium 1 quad^{to}. Manifeſtũ igitur eſt, capitula cubi, quadratorũ, rerum, æqualium numero: etiam cubi rerum & numeri, æqualiũ quadratis inuicem ſibi reſpondere.

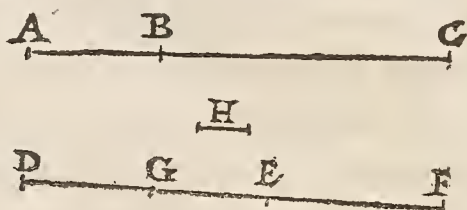
Pariter capitulum cubi, æqualis quadratis, rebus, & numero, reſpondet capitulo, cubi, quadratorum, & numeri, æqualium rebus, 10
ideoq; ubi res admodũ paucę ſunt, eſt æquatio una ficta, æqualis ueræ correſpondenti alterius capituli cubi æqualis totidem quadratis, rebus & numero. Exemplũ. Si cubus æqualis ſit 2 quad^{tis} 1 poſ^{oni} 6, numero, res ualet 3, nec plus aut minus, quia ſi cubus & 2 quad^{ta} & 6 numerus, æquentur uni poſitioni, nulla poteſt æquatio uera eſſe, ſed ficta erit m: 3. quæ erat uera in alio capitulo. Quod ſi res tot ſint, ut capitulum cubi, quadratorum, numeri, æqualium rebus, poſsit habere æquationem ueram, tunc æquatio uera duplex erit, & una ficta, correſpondentes duabus fictis, & uni ueræ alterius capituli. Exemplũ. Si cubus & 3 quad^{ta} & 6 numerus, æquales ſint 20 rebus, duæ erunt æquationes ueræ, ſcilicet 3, & ℞ 11 m: 3, & una ficta, ſcilicet ℞ 11 p: 3 m: Igitur æſtimatio cubi, æqualis 3 q̃d^{tis}, 20 reb. 6 numero, uera eſt, ℞ 11 p: 3, & duæ fictæ erunt, 3 m: & ℞ 11 m: 3 m:.

Eadem ratione capitula cubi & quadratorũ æqualium rebus & 11
numero, & cubi ac numeri æqualiũ q̃d^{tis} & rebus, ſibi inuicẽ reſpondent. Vbi igitur capitulum cubi & numeri æqualium rebus & q̃dratis nõ habet æquationem ueram, habebit unam tantum fictam, æqualem ueræ alterius capituli. Exemplum. 1 cubus p: 72, æquatur 6 quadratis p: 3 rebus, rei ficta æſtimatio eſt, m: 3, & hæc eſt uera, unius cubi & 6 quadratorum æqualium 3 rebus & 72, Et ſicut capitulum 1 cu^{bi} p: 72 æqualium 6 q̃d^{tis} p: 3 rebus, caret uera æſtimatione, ſic capitulũ 1 cubi p: 6 quadratis æqualiũ 3 rebus p: 72, caret ficta, at ubi capitulum cubi & numeri æqualium quadratis & rebus habet ueram æſtimationem, habebit duplicem, & unam fictam, correſpondentes duabus fictis, & uni ueræ alterius capituli. Exemplũ, cubus p: 4 æq̃lis ſit 3 q̃d^{tis} p: 5 rebus, tunc ueræ æſtimationes ſunt 4, uel ℞ $1\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$, ficta uero eſt, ℞ $1\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$ m: & hæc eſt uera æſtimatio capituli cu

bi & 3, quadratorum æqualiũ 5 rebus & 4 numero, & reliquæ duæ, scilicet 4 & R 1 $\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$ sunt m: in eodem casu & fictæ.

12 Est etiam manifestum, quod si q̄d'q̄d^{ta} & res & numerus comparentur, regula septima in eis præcise locum habebit, sicut in quadrato rebus & numero, conferendo capitula capitulis, eadem ratio in reliquis deriuatiuis. Demonstratio.

13 Etiam oportunum est, ut ostendamus hæc demonstratione, quod etiã in toto hoc libro facturi sumus, ut rebus tã admirabilibus, ultra experientiam, fidei ratio accedat. Sit igitur gratia exempli, A B cubus, cũ B C numero æqualis D E quad^{tis} cum E F rebus, & sit H æstimatio uera, quia igitur ex supposito, A C æquatur D F, fiat D G



æq̄lis A B, quia igitur D E superat A B, in G E, & B C est æqualis G F, ex cõmuni animi sententia, erit B C, maior F E in G E, & q̄lis excessus D E super A B, talis B C, super E F. Ponat̃ igitur H minus, & ficta æquatio, erit igitur A B & E F, m: sed D E, & B C, remanent p: qa igitur differentia A B & D E, est G E, & differẽtia B C & E F, est etiam G E, & tantũ est detrahere A B ex D E, & E F ex B C, quantũ addere eas tanq̃ m: sequit̃ quod posita ęstimatiõe positionis, m: H, quod A B, cũ D E ęquatur B C cum E F, utrumq; enim aggregatum est residuũ G E, igitur cubus cũ quadratis, ęquatur rebus & numero eodẽ modo, & rei æstimatio est m: H, quantum scilicet in alia æquatione fuit idem in alijs.

Sequitur etiam, quod aggregatum partium in uno, est æquale differentiæ mutuæ in reliquo, uelut si dicam, cubus & 10 æquantur 6 quadratis & 8 rebus, & æstimatio in hoc capitulo sit uera, erit in capitulo cubi & 6 quadratorũ æqualium 8 rebus & 10 numero in ficta æstimatione, aggregatum ex cubo & 6 censibus, æquale differentiæ cubi & 6 censuum in uera æstimatione, uel 10 & 8 rerum in eadem uera æstimatione, & tantum erit aggregatum 8 rerum & numeri in ficta æquatione.

De numero omnium capitulorum. Cap. II.

1 T capitula, quæ generaliter scire conuenit, usq; ad solidum extenduntur cubum, simplicia uero, quoniam unius sunt generis, in unum contraximus, quanquam ipsum usq; in infinitum extendatur. Quæ uero cum numero quadratum & positionem habent, tria sunt, & quamuis duas sortiatur

tur æſtimationes unum eorum, quia tamen ſimul illæ cõiunctæ ſunt, tria tantum dicemus eſſe capitula, At uero cubi & rerum & numeri tria, uerum cum unum illorum duas habeat æquationes, in quatuor euadũt, totidem fiunt ex cubo quadratis & numero, iam igitur duodecim. At cubi quadratorum poſitionum ac numeri, ſeptem, in eorũ autem quatuor geminæ æquationes, quare undecim fient capitula omnia, igitur prima & generalia uiginti tria, horum primo prætermiſſo, quodlibet deriuatiua duo ſibi iungit, alterum quadrati, alterũ cubi ratione, erũt igitur generalia deriuatiua quadraginta quatuor. Poſt hæc duo alia ſunt ignotæ quantitatis, alterum cum multiplicatur, alterum cum per ſe ſumitur. eſt præterea unum generale mediorum. omnium igitur primorum notabilium numerus uiginti ſex, deriuatiuorum quadragintaquatuor, omnium collectio ſeptuaginta. Poſt hęc autem cum plura alia etiam ſingularia adiecimus, ſed eorum maior uoluptas q̄ neceſsitas, ea igitur non inter hæc numerabimus.

Horum autem neceſsitas ſic colligitur, cum lineæ ſuperficiebus, 2
aut ſuperficies lineis cognoſcuntur, q̄dratorũ, poſitionum, ac numeri capitula oportuna ſunt, at ſi ex latere Tetragonico aut Solido, capitulum ſimplex, cum uero trium ignota duo ſupponuntur, eaq; ad ſuperficies ac lineas pertinent, quantitatis ignotæ, & rei, capitula exploranda erunt, atq; ea ſimpliciter, ſi lineæ lineis comparantur, producta uero, cum ſuperficiebus, at ſi lineis corpora comparanda, cubi rerum & numeri, ſi corporibus, ſuperficies cubi q̄dratorum & numeri, ſin autem ſuperficierum & corporũ & linearum ratio ſit quærenda, capitula cubi q̄dratorum poſitionum & numeri ſunt utiliora. Porrò in his omnibus ad numerũ ſemper comparatio fiet. Hæc ratio præcipua eſt, quanq; perſæpe omnibus in unoquoq; horum uti neceſſariũ ſit, operæprecium tamen fuerit, ſingula hæc deſcribere, deriuatiuaq; ſuis adiungere primitiuis. ſunt autem hæc.

Capitula primitiua carentia deriuatiuis.

Numerus æqualis rebus, uel numerus æqualis q̄dratis, uel nume 1
rus ęqualis cubis, uel numerus æqualis q̄d'q̄d^{tis}, uel numerus ęqualis nomini ſeu relato primo, ac ita deinceps comparando numerum cuicunq; denominationi.

Numerus & q̄d^{ta} æqualia rebus, uel numerus & cubus æq̄lia re- 2
bus, uel numerus & cubus æq̄lia q̄d^{tis}, uel numerus & q̄d'q̄d^{ta} æqualia rebus, uel numerus & q̄drati q̄d^{ta} æqualia q̄d^{to}, uel numerus & q̄d'q̄d^{ta} æqualia cubis, uel numerus & nomen primum æq̄lia rebus aut q̄dratis aut cubis & ſic abſq; fine.

3 Numerus & poſitio, & ignota quantitas.

4 Numerus & q̃dratũ poſitionis, & ignota quantitas, ſeu numerus & q̃d^{tum} quantitatis ignotæ & poſitio, ſeu numerus cũ q̃d^{to} poſitionis quantitatis ignotæ, ſeu numerus & productum ex poſitione in quantitatem ignotam, cum altera earum, uel cum q̃drato unius earum.

Capitula primitiua.	Capitula deriuatiua.
1 Numerus æqualis q̃d^{to}	1 Numerus æq̃lis q̃d' q̃d' & q̃d'.
& rebus.	2 Numerus æqualis cu' q̃d' & cub'.
2 Numerus & res æqualia	3 Numerus & q̃d' æquales q̃d' q̃d'.
quadrato.	4 Numerus & cub' æq̃les cub' q̃d'.
3 Numerus & q̃d' ęqualia	5 Numerus & q̃d' q̃d' æqualia q̃d'.
rebus.	6 Numerus & cub' q̃d' æq̃lia cub'.
4 Numerus æqualis cubo	7 Numerus æq̃lis q̃d' & cub' q̃d'.
& rebus.	8 Numerus æq̃lis cub' & cubo cubi.
5 Numerus & res æqualia cubis.	9 Numerus & q̃d' æq̃lia cub' q̃d'.
	10 Numerus & cub' æq̃lia cub' cub'.
6 Numerus & cubus æq̃l'	11 Numerus & cub' q̃d' ęq̃l' q̃d' ęq̃° pri^{a}.
rebus æq̃tio prima.	12 Nu$^{r'}$ & cub' cub' æq̃lia cub' ęq̃° pri^{a}.
7 Numerus & cub' ęq̃lia	13 Nu$^{r'}$ & cub' q̃d' ęq̃lia q̃d' ęq̃° ſecunda.
rebus ęq̃° ſecunda.	14 Nu$^{r'}$ & cub' cub' ęq̃lia cub' ęq̃° ſecũd^{a}.
8 Numerus ęq̃lis q̃drato	15 Numerus ęq̃lis q̃d' q̃d' & cub' q̃drati.
& cubo.	16 Numerus ęq̃lis cub' q̃d' & cub' cubi.
9 Numerus & q̃dratum	17 Numerus & q̃d' q̃d' ęq̃lia cub' q̃drati.
æqualia cubo.	18 Numerus & cub' q̃d' ęq̃lia cub' cubi.
10 Numerus & cub' ęq̃lia	19 Nu$^{r'}$ & cub' q̃d' ęq̃lia q̃d' q̃d' æq̃° pri^{a}.
q̃drato ęq̃° prima.	20 Nu$^{r'}$ & cub' cub' ęq̃lia cub' q̃d' ęq̃° pri^{a}.
11 Numerus & cub' ęq̃lia	21 Nu$^{r'}$ & cub' q̃d' ęq̃l' q̃d' q̃d' ęq̃° ſecũd^{a}.
q̃drato ęq̃° ſecunda.	22 Nu$^{r'}$ & cub' cub' ęq̃l' cu' q̃d' ęq̃° ſecũd.
12 Numerus ęq̃lis rebus	23 Nu$^{r'}$ ęq̃lis q̃d' & q̃d' q̃d' & cub' q̃d'.
q̃drato & cubo.	24 Nu$^{r'}$ ęq̃lis cub' & cub' q̃d' & cub' cu'.
13 Numerus & res ęq̃lia	25 Nu$^{r'}$ & q̃d' ęq̃lia q̃d' q̃d' & cub' q̃d'.
quadrato & cubo.	26 Nu$^{r'}$ & cub' ęq̃lia cub' q̃d' & cub' cu'.
14 Numerus & res & q̃d'	27 Nu$^{r'}$ & q̃d' & q̃d' q̃d' ęq̃lia cub' q̃d'.
ęqualia cubo.	28 Nu$^{r'}$ & cub' & cub' q̃d' ęq̃lia cu' cub'.
15 Numerus & q̃d' ęq̃lia	29 Nu$^{r'}$ & q̃d' q̃d' ęq̃l' q̃d' & cu' q̃d ęq̃° p^{a}
rebus & cub' ęq̃° prima.	30 Nu$^{r'}$ & cu' q̃d' ęq̃l' cu' & cu' cu' ęq̃° pri^{a}.
16 Numerus & q̃d' ęq̃lia	31 Nu$^{r'}$ & q̃d' q̃d' ęq̃l' q̃d' & cu' q̃d' ęq̃° ſec.
rebus & cubo ęq̃° ſecũda.	32 Nu$^{r'}$ & cu' q̃d' ęq̃l' cu' & cu' cu' ęq̃° ſec.

17 Nume-

17 Numerus & cu' ęq̃lia rebus & q̃d' ęq̃° prima.
18 Numerus & cu' æq̃lia rebus & q̃d' æq̃° ſecũda.
19 Numerus & res & cu' æq̃lia q̃d' æq̃° prima.
20 Numer' & res & cu' ęq̃les q̃d' æq̃° ſecunda.
21 Numerus q̃d' & cu' æq̃lia rebus æq̃° prima.
22 Numer' & q̃d' & cu' æq̃lia rebus æq̃° ſecũd^{a}.

33 Nu$^{r'}$ & cu' q̃d' ęq̃l' q̃d' & q̃d' q̃d' æq̃° pri^{a}
34 Nu$^{r'}$ & cu' cu' ęq̃l' cu' & cu' q̃d' ęq̃° pri^{a}.
35 Nu$^{r'}$ & cu' q̃d' ęq̃l' q̃d & q̃d' q̃d' ęq̃° ſec.
36 Nu$^{r'}$ & cu' cu' æq̃l' cu' & cu' q̃d' æq̃° ſec.
37 Nu$^{r'}$ & q̃d' & cu' q̃d' ęq̃l' q̃d' q̃d' ęq̃° pri^{a}
38 Nu$^{r'}$ & cu' & cu cu' ęq̃l' cu' q̃d' æq̃° pri^{a}.
39 Nu$^{r'}$ & q̃d' & cu' q̃d' ęq̃l' q̃d' q̃d' ęq̃° ſec.
40 Nu$^{r'}$ & cu' & cu cu' ęq̃lia cu' q̃d' ęq̃° ſec.
41 Nu$^{r'}$ & q̃d' q̃d' & cu' q̃d' ęq̃l' q̃d' ęq̃° pri^{a}
42 Nu$^{r'}$ & cu' q̃d' & cu' cu' ęq̃l' cu' ęq̃° pri^{a}.
43 Nu$^{r'}$ & q̃d' q̃d' & cu' q̃d ęq̃l' q̃d' ęq̃° ſec.
44 Nu$^{r'}$ & cu' q̃d' & cu' cu' æq̃l' cu' æq̃° ſec.

De æquationibus capitulorum ſimplicium. Cap. III.



Stimatio rei, eſt quantitas, in qua ueritatẽ experimur propoſitorum in capitulo & quæſtione. Exemplum eſt, cum quis dixit, feci ex 10 duas partes, & duxi earum ſingulas in ſe, & fuit productorum differentia 60. quia igitur neſcimus quæ quantitas ſit maior aut minor. Ponemus minorẽ eſſe rem ignotam, quam uocamus poſitionem, erit igitur pars maior reſiduũ ad 10, ſcilicet 10 m: 1 poſitione, tunc ſequemur quod eſt propoſitũ, & ducemus partes in ſe, & fiet q̃dratũ minoris 1 q̃dratũ, & maioris 1 q̃dratũ p: 100 m: 20 poſ$^{b'}$, adde quod eſt m: alteri parti, fiet 1 q̃d^{m} p: 100 ex una parte, & 1 q̃d^{m} p: 20 poſ$^{b'}$, horum differentia fuit 60 ex ſuppoſito, addemus igitur 60 minori parti, & tunc fient ęq̃les 1 q̃d^{m} p: 100, & 1 q̃d^{m} p: 20 poſ$^{b'}$, p: 60, abĳciemus 1 q̃d^{m} & 60 ex utraq; parte, remanebũt igitur 20 poſ^{es} æq̃les 40, q̃a ſi ab æq̃libus ęq̃lia auferant̃, quę relinquunt̃ ſunt ęq̃lia, diuidendo igitur 40, per 20 numerum poſitionum, exibit 2, æſtimatio poſitionis, in hoc itaq; 2, ueritatem propoſitę quæſtionis experimur, nam ſi eius quadratũ quod eſt 4, ex 64 q̃drato 8 reſidui 2 & 10 abĳciatur, relinquetur 60 propoſitus Numerus. Eſt etiam uerum de 2, quod proponitur in capitulo, ſcilicet quod q̃dratum eius quod eſt 4. cum 100, æq̃tur quadrato poſitionis, quod eſt iterũ 4 & 20 poſ$^{b'}$, quę ſunt 40 & 60 ſimul iunctis,

1 poſitio	1 q̃dratum.
10 m: 1 poſ^{ne}	1 q̃d^{m} p: 100 m: 20 poſ$^{b'}$.
1 q̃d^{m} p: 20 poſ$^{b'}$	1 q̃dratum p: 100.

60 p: 20 poſitionibus æqualia 100.

20 poſitiones æquales 40.

nam

nam utroque modo colliguntur 104, dicemus igitur merito, propter duo, quod 2 est rei æstimatio, & cum recte operatus fueris, in æstimatione seu æquatione, utraque experientia succedit.

DEMONSTRATIO.

2 Vt uero rei ueritas apertius deprehendatur, atque cum ea ratio, scire enim est per demonstrationem, ut dicunt, intelligere, sint gratia Exempli, cubi tres æquales 24, & ponatur A C latus unius cubi, & C D alterius, &, D B tertij, quia igitur cubi sunt æquales, inuicem, erunt & lineæ A C, C D, D B æquales, cum igitur secundum numerum, secundum quem A C est in A B, qui est 3, diuiditur 24, & cuborum quantitas fiet ex 19^a quinti uel 17^a septimi elementorum, & 31^a. 11^i eiusdem, cubus A C æqualis 8, igitur A C latus, erit 2, æstimatio rei, ex quo colligitur generalis regula.

A C D B

REGVLA.

3 Deprime propositas duas denominationes ad numerum, si numerus non adsit, æqualiter deducendo, cunque altera fuerit denominatio, altera numerus, diuide numerum per numerum denominationis, exiens est æstimatio denominationis, quæ denominatio si positio est, positionis habes æstimationem. si alia denominatio, sume latus seu radicẽ illius numeri pro denomniationis qualitate, si q̃dratũ, q̃dratum, si cubus, latus cubicum, si q̃d'q̃d^ti, radicẽ radicis, atque ita deinceps, & latus illud seu radix, est positionis uera æstimatio. Exemplum, cubi 20 æquantur 180 relatis primis, quia igitur nõ est hic numerus. Infimam denominationem cuborum, pones pro simplici numero, scilicet 20. & maiorem seu altiorem relatorum, per cubos deprimes, & fient 180 q̃drati, diuide igitur 20 numerum, per 180 numerum q̃dratorũ, exit $\frac{1}{9}$ æstimatio q̃drati. Verum nos querimus positionis æstimationẽ, non q̃drati, sume igitur radicem q̃dratam $\frac{1}{9}$. & est $\frac{1}{3}$, pro uera æstimatione. Aliud Exemplum, 7 q̃drati æquentur 21 cub'q̃d^ti, deprime ad numerum æqualiter, fient 7 æq̃lia 21 q̃d'q̃d^ti, diuide 7 per 21. exit $\frac{1}{3}$, & R'R $\frac{1}{3}$, quæ est latus q̃d'q̃d^ti, est rei æstimatio. Aliud. 2 cubi æquentur 20 q̃d'q̃d^ti, deductis cubis ad numerum, q̃d'q̃d^ti peruenient ad pos^es, igitur 20 pos: æquantur 2, diuide 2 per 20, exit $\frac{1}{10}$, & quia diuisisti cum numero positionum, erit positionis æstimatio $\frac{1}{10}$. Aliud. 20 æquantur 5 q̃dratis, diuide 20 per 5, exit 4, æstimatio q̃drati, igitur rei æstimatio est 2.

4 Et ut omnibus etiam capitulis futuris satisfaciam, maioris denominationis numero reliquos omnes ac numerum diuides, maiorem intelligo

intelligo altiorem,& cum minore denominatione deprimes, postmodũ regulam capituli sequeris. Sint gratia exempli 4 cubi æquales 12 q̃dratis & 8 pos^b. minor denominatio est positio, maioris numerus est 4, diuides igitur omnia per 4,&habebis 1 q̃dratum æquale 3 pos^b p:2.

4 cub.	12 q̃d^ta p:8 pos^b
4	
1 q̃d.	3 pos^es p:2.

Ex his etiam patet, quod simplex positio, longe magis patet falsis positionibus, Nam & ad q̃drata,& ad cubos,& reliquas extenditur denominationes, Ideoq; æstimationes habet in radicibus, quarum in falsa positione nullus omnino est usus. Quod uero pertinet ad numerum positionibus æqualem, adhuc utraq; falsa positione generalius est, ut in primo Exemplo patuit, nulla enim falsa positione licet uenari, quæ nam partes decem q̃drata uariant, quorum differentia sit 60, ut ibi propositum est. Cor^m.

De subiectis æquationibus generalibus & singularibus. Cap. IIII.



SIngulares dicuntur æquationes, in quibus nullum capitulum perfecte potest absolui,&tales sunt numerus integer, uel fractus, latus etiam omne numeri, seu quadratum seu cubicum uel alterius generis, atq; ut ita dicam, omnis simplex quantitas, item constantes ex duabus radicibus omnes, quarum altera sit q̃drata, uel ℞'℞. & generaliter radix par, unde quę ex duobus constant nominibus,& apotome seu ut dicunt recisa tertij ac sexti generis, non apta sunt æquationi generali. 1

Omne etiam capitulum, quod ex numero q̃drato, cubo, & positionibus constat, eas habet generales æquationes, quæ ex capitulo, ad quod deducuntur, deriuatę sunt, addita uel detracta tertia quadratorum numeri parte, ut suo loco ostendetur. 2

Generales autem æstimationes, sunt, in capitulis q̃drati æqualis rebus & numero, secundi generis, constans ex nominibus duobus, ut ℞ 19 p:3, capituli autem q̃drati & rerum æqualium numero, secunda apotome, ut ℞ 19 m:3, capituli autem quadratorum & numeri æqualium rebus, apotome,& constans ex duobus nominibus primi generis, ut 3 p:℞ 2,& 3 m:℞ 2. Vbi aũt primũ genus dico, quartũ etiam intelligo, sic & ubi secundum, etiam quintum, tam in apotome quàm ex duobus nominibus constante. 3

At unius radicis uniuersalis æquatio, deriuatiuis conuenit capi- 4

 tulis

tulis, seu cubica seu q̃drata, hisq́ quorum principalibus quadratum aut cubus radicis pro æquatione fuerat, uelut si q̃drato æquali rebus & numero æstimatio hęc conueniebat, R 19 p: 3, capitulo cub' q̃drati æqualis cubis & numero sub eadem quantitate existentibus, ęquatio erit, R v: cubica R 19 p: 3.

5 Et sicut radix quadrata, nulli pręterq̃ numero iungi potest, ut æquationem efficiat generalem, sic è diuerso, cubica cubicæ iũcta, efficere potest, numero non potest. Cum igitur iungitur cubi æqualis rebus & numero, æquationem producit, non integram tamen, at detractæ inuicem, efficiunt æquationem capituli cubi & rerum æqualium numero, uelut R cubica 4 p: R cubica 2, est æquatio capituli, cubi æqualis rebus & numero, & R cubica 4 m: R cubica 2, est æquatio capituli cubi & rerum æqualium numero.

6 At capitulum cubi æqualis quadratis & numero, habet æquationem constantem ex tribus quantitatibus proportionalibus, quarum duæ extremę sunt radices cubicæ, media est numerus, ut R cubica 16 p: 2 p: R cubica 4. sed capitulum cubi & quadratorum æqualium numero, habet similem in omnibus præcedenti æquationem, excepto quòd numerus est m: uelut R cubica 16 m: 2 p: R cubica 4.

7 Illud etiam intelligendum est, radices simplices pro generalibus æquationibus haberi, ut tamen etiam simplicia sint capitula, uelut R cubica inseruit capitulo numeri æqualis cubo, & q̃drata, numeri ęqualis q̃drato, & relata, capitulo relati æqualis numero, & sicut hæ simplices compositis capitulis conuenire nequeunt, sic nec ullum compositũ ex pluribus radicibus incommensurabilibus capitulo simplici potest conuenire.

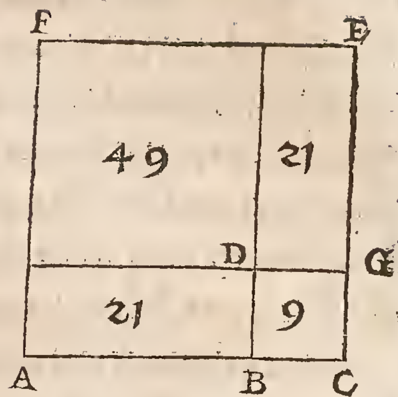
Ostendit æstimationem capitulorum compositorum minorum, quæ sunt q̃dratorum, numeri, & rerum. Cap. V.

DEMONSTRATIO.



It quadratum F D & 6 res (gratia exempli) ęquale 91, tunc faciam D B & D G cum fuerint productę esse 3, dimidium scilicet 6, numeri rerum, & complebo quadratum D G B C, indeq́ productis C G & C B quadratum A F E C, prout in quarta secundi elementorũ fit, quia igitur D B ducta in A B ex diffinitione secũdi elementorum producit A D super finem, & ex numero quolibet in rei æstimationem producitur æstimatio illarum rerum, uelut si res est 4, & sint quinq́ res, erunt quinq́ res 20, & tantum produ-

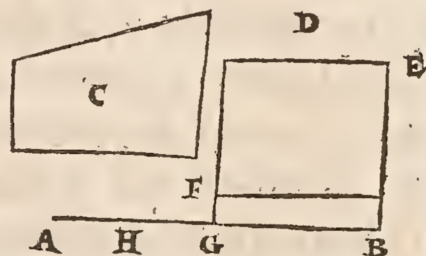
citur



citur ex 4 æstimatiõe rei in 5 numerum rerũ, ut ostendimus in capitulo tertio, igitur cum B D sit 3, & A B æstimatio rei, erit superficies A D tribus rebus æqualis, seu æstimatio trium rerum, at superficies D E æqualis est A D, ex 43^{a} primi elementorum, igitur & ipsa est æstimatio trium aliarum rerum, duæ igitur superficies, A D & D E, sunt æquales 6 rebus, quare ipsę cum quadrato F D sunt 91, at quadratum, C D est 9, quia B D est 3, igitur A C quadratum est 100, quare latus eius A C est 10, cum igitur B C sit 3, detracta B C ex A C, relinquitũ A B latus D F 7.

Alia Demonstratio.

Sit modo A B numerus rerum quarundam, æqualium C numero & quadrato D, & faciam quadratum B G dimidij A B, quod sit G E, à quo auferam C numerum, ut E F superficies æqualis sit numero C, & ponam latus quadratũ, F B superficiei, quod sit G H, dico lineas B H & H A esse utrasq; latera quadrati D, unde sequitur duas fore ueras æstimationes huius capituli, quarum aggregatum est æquale numero rerum, uidelicet A B, constat enim quod rectangulum ex A H in H B, una cum q̃drato H G est æquale quadrato B G, ex 5^{a} 2^{i} elementorum. quadratum autem H G æquale fuit F B superficiei, rectangulum igitur ex A H in H B, æquale est E F, quare & C numero, quod autem fit ex A B in H B, ex 3^{a} 2^{i} elementorũ, æquale est quadrato H B & rectangulo A H in H B, igitur quod fit ex numero rerum A B in æstimationem rei quę est H B, æquale est numero C, & quadrato H B, quod est probandum. Et similiter eadem ratione rectangulum ex A B in A H, ęquale est quadrato A H, & ductui A H in H B, sed ex A H in H B, ut probatum est, fit C numerus, igitur rectangulum ex A B in A H, scilicet ex numero rerum in rerum æstimationẽ, æquatur quadrato rei & numero proposito.



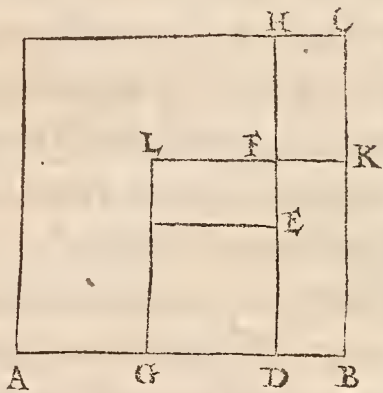
Ex hoc patet, quod illi falluntur qui dicunt (quòd si B H, gratia exempli) sit æstimatio rei, & G F 3, quod rectangulum ex B H in G F erit 3 G H seu triplum G H, hoc enim esse non potest, scilicet quod superficies contineat lineam aliquam, neq; numero, nec alia proportione, cum infinitę lineæ possint esse in superficie, quantitas enim continua nullum suę diuisionis recipit terminum, sed ueritas est, quod si G F cõtineat tres unitates (gratia exempli) id est partes tres lineæ B H, diuisę

in tot partes, quot unitates sunt in numero quem dicitur continere, uel uti quod B H ponatur 12, erit G F 3, ubi G F sit quarta pars B H, & tunc uerum est, quod ex B H in G F fit superficies continens 36 superficies quadratas, quarum uniuscuiusq; tetragonicum latus est unitas, id est una ex partibus illis, secundum quas B H est diuisa in 12, & G F in 3, hoc autem tam in rationalibus, quàm in irrationalibus pulchre ostendit Plato in Memnone.

Nec admireris, hanc secundam demonstrationem, aliter q̃ à Mahumete, explicatã, nam ille immutata figura magis ex re ostendit, sed tamen obscurius, nec nisi unam partem, eamq; pluribus, unde nos facilitati & breuitati consulentes, tum ut utriq; æstimationi una demonstratione satisfaceremus, hac utimur.

ALIA DEMONSTRATIO.

3 Sit modo quadratum A C in tertia figura, æquale 6 rebus & 16 numero, & ponatur A D numerus rerum, scilicet 6, igitur superficies A H est 6 positiones, quare D C residuũ erit pręcise 16, diuidatur A D per æqualia in G, & fiant quadrata G B & G D, quæ sint G K & G E. Quia igitur B C ęqualis est B A, & B K æqualis B G, erit K C æqualis G A, quare etiam G D & F L, & quia D E & D G sunt æquales, item D F & B G, erit F E æqualis D B, quare etiam ęqualis F K, duæ igitur lineæ F K & F H, æquales sunt F L & F E, & anguli A D F recti, igitur F C superficies æqualis est L E, sed F C cum F B fuit 16, igitur L E cum F B fuit 16, addito quadrato G E quod est 9, nam G D fuit 3, erit G K quadratum 25, igitur latus G B 5, addita igitur G A, quæ est 3, fiet A B tota 8, rei æstimatio.



4 Secundum hæc formabimus regulas tres, pro quarum memoria subiungemus Carmen hoc,

Querna, da bis. Nuquer, admi. Requan, Minue dami.

REGVLA I.

Est autem unicuiq; horum capitulorum commune, ut dimidium numeri rerum in se ducatur. Quando igitur quadratum æquatur rebus & numero, quod significatur per Querna siue primam tantum intelligas literam seu adnumeres sequentes à prima uocali cõsonantes, ut Querna, quadratũ æquale rebus & numero significet, & Nuquer, Numerum quadrato ac rebus æqualem, & Requan, res quadrato & numero æquales. In hoc Querna igitur, seu capitulo quadrati æqualis

lis rebus & numero, addes quadrato dimidij rerum numerum æquationis, & totius accipe radicem quadratam, cui adde dimidium numeri rerum, & aggregatum est rei æstimatio. Exemplum. sit 1 q̃d^{m} æquale 10 rebus p: 144, duc 5 in se, fit 25 quadratum dimidij rerum, adde 144 fit 169, cuius ℞ est 13, huic adde 5 dimidium numeri rerum, fit 18, æstimatio rei. Rursus fit 1 q̃d^{m} æquale $\frac{2}{3}$ rei p: 11, duc $\frac{1}{3}$ dimidium numeri rerum in se, fit $\frac{1}{9}$, adde ei 11, fit 11 $\frac{1}{9}$, accipe ℞ quæ est 3 $\frac{1}{3}$, cui adde $\frac{1}{3}$ dimidium numeri rerum, fit 3 $\frac{2}{3}$, rei æstimatio. Rursus, sit 1 q̃d^{m} æquale 10 rebus p: 6, duc 5 in se dimidium numeri rerum, fit 25, adde ei 6 fit 31, huius ℞ adde 5, dimidium numeri rerum erit rei æstimatio, ℞ 31 p: 5. Rursus sit 1 q̃d^{m} æquale rebus ℞ 12 p: 22, duc ℞ 3 in se fit 3, quadratum dimidij numeri rerum, adde ei 22 fit 25, huius ℞ est 5, cui adde ℞ 3, quod est dimidium numeri rerum, fiet rei æstimatio 5 p: ℞ 3, & si in hoc casu numerus fuisset 20, esset rei æstimatio ℞ 23 p: ℞ 3, & si fuisset numerus 9, esset æstimatio rei ℞ 12 p: ℞ 3, quod est dicere, ℞ 27, & si fuisset 1 q̃dratum æq̃le rebus ℞ 12 p: ℞ cub. 10 numeri, duc ut prius ℞ 3, dimidium numeri rerũ in se, fit 3. adde ei ℞ cub. 10, fit 3 p: ℞ cub. 10, huius accipe radicem, quæ est ℞ v: 3 p: ℞ cub. 10, cui adde dimidium numeri rerum & fiet æstimatio rei ℞ 3 p: ℞ v: 3 p: ℞ cub. 10. & hac uarietate exemplorum hic usi sumus, ut in reliquis idem fieri posse intelligas, tum etiam eadem in duabus sequẽtibus regulis experire, quandoquidem nos duplici exemplo contenti erimus. Manifestum est igitur, quod hic bis addimus, scilicet numerum q̃drato dimidij rerum, & dimidiũ rerum radici aggregati, & hoc est, quod in carmine diximus, da, bis, quasi, bis iunge.

REGVLA II.

Si autem numerus quadrato & rebus æqualis sit, q̃drato dimidij 5 numeri rerum adijcies numerum æquationis, & totius aggregati accipe radicem, à qua minue dimidium numeri rerum, & residuum est rei æstimatio. Exemplum, 144, æquatur 10 rebus & 1 q̃d^{o}, duc 5, dimidium 10 numeri rerum, in se, fit 25, huic adde 144 fit 169, huius ℞ est 13, à qua abijce 5, dimidium numeri rerum, relinquetur rei æstimatio 8. Rursus, sit 6 æqualis 10 rebus p: 1 q̃drato, ducto 5 dimidio rerum in se fit 25, adde 6 fit 31, ex huius radice abijce 5, dimidium numeri rerum, fit ℞ 31 m: 5, æquatio.

Ex hoc patet, quod hæc regula à præcedenti solum differt, quòd Cor^{m}. minuat dimidium numeri rerum. Ab aggregati radice, ubi illa iungebat, & hoc est, quod in carmine diximus, Ad, mi, quasi, adde primo,

deinde minue, scilicet, adde numerum quadrato, & minue dimidium numeri rerum postmodum ab aggregati radice.

Cor^m. Ex quo patet, quòd differentia æstimationis quadrati, æqualis rebus & numero, & numeri, æqualis rebus & quadrato, est numerus rerum ad unguem, ubi in eisdem rebus & numeris statuantur, uelut æstimatio q̃drati æqualis 10 rebus p: 144 est 18, & æstimatio 144 æqualis quadrato & 10 rebus est 8, & differentia 18 & 8 est 10.

REGVLA III.

6 Si uero res æquales sint quadratis & numero, ducto, ut prius, dimidio numeri rerum in se, & ab eo detracto numero æquationis, radicem residui minue ex dimidio numeri rerum, aut adde, & tam aggregatum, quàm residuum est rei æstimatio. Exemplum. 1 q̃dratum p: 16, æquatur 10 rebus, ducto 5 in se fit 25, ut prius, deinde minue 16 ex 25 relinquitur 9, cuius ℞ quę est 3, addita uel detracta à 5 dimidio numeri rerum, ostendit rei æstimationes, 8 addita, & 2 detracta, si igitur 10 res sumantur quæ sint 2, erunt 20 & tantum erit q̃dratũ 2 cum 16, item si sumantur 10 res quæ sint 8, erunt 80, & tantum est quadratum 8, addito ei 16. Rursus si dicam, 10 res, æquantur 1 q̃d^to p: 6, ducto 5 dimidio numeri rerum in se, fit 25, detracto autem 6 relinquitur 19, cuius ℞ addita uel detracta ex 5, ostendit rei æstimatiões, maiorem quidem 5 p: ℞ 19, minorem uero 5 m: ℞ 19.

Not^m. Quod si detractio ipsa numeri, à q̃drato dimidij numeri rerum fieri nequit, quęstio ipsa est falsa, nec esse potest quod proponitur, semper autem pro regula uniuersali in hoc tractatu toto est obseruandũ, quòd cum ea quæ præcipiuntur fieri non possunt, nec illud quod proponebatur fuit, nec esse potuit. Nunc autem subiungemus aliquas quęstiones, duas ex Mahumete, reliquas nostras, ex omnibus his, quę nec multiplici positione, nec particulari utuntur regula, difficillimas.

QVÆSTIO I.

Quęst. prima. Est numerus, à cuius quadrato si abieceris $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ ipsius quadrati, atq; insuper 4, residuum autem in se duxeris, fiet productum æquale quadrato illius numeri, & etiam 12. Pones itaq; quadratum numeri incogniti quem quęris, esse 1 rem, abijce $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ eius & insuper 4, fiet $\frac{5}{12}$ rei m: 4, duc in se fit $\frac{25}{144}$ q̃d^ti p: 16 m: 3 $\frac{1}{3}$ rebus, & hoc est æquale uni rei, & 12, abijce similia, fiet 1 res æqualis $\frac{25}{144}$ q̃d^ti p: 4 m: 3 $\frac{1}{3}$ rebus, redde quod est minus, alteri parti, pro uniuersali regula, erũt res 4 $\frac{1}{3}$ æquales $\frac{25}{144}$ q̃drati p: 4, quare per quartam regulam tertij capituli, deuidi numerum rerum & 4 per $\frac{25}{144}$ numerum q̃drati, & fiẽt res 24 $\frac{24}{25}$ ęquales 23 $\frac{1}{25}$ p: q̃drato, quare per tertiam regulã, du

ces

ces $12\frac{12}{25}$ in ſe, fiet $155\frac{469}{625}$. minue $23\frac{1}{25}$ fiet $132\frac{544}{625}$, huius ℞ eſt $11\frac{13}{25}$, quam adde ad $12\frac{12}{25}$ dimidium numeri rerum, fiet æſtimatio rei quęſita 24, ſcilicet quadrati huius radix, eſt numerus ille qui quæritur. Ex hoc docemur per principalia capitula uitare deriuatiua, nam in poſitione rei pro primo numero, fuiſſet quadratum eius operationis fundamentum, & perueniſſes ad 1 q̃dq̃d^{m} p:$23\frac{1}{25}$ æqualia $24\frac{24}{25}$ q̃d^{to}, quare hæc ſit tibi pro exemplo, nunc ſequamur ſecundam illius.

Qvæstio II.

Queſt. ſecūda

Duo duces diuiſerunt militibus ſuis aureos 48 ſinguli, Porrò unus ex his habuit milites duos plus altero, & illi qui milites habuit duos minus, contigit ut aureos quatuor plus ſingulis militibus daret, quęritur quot unicuiq; milites fuerint? Pone numerū militum minorem 1 rem, maior erit 1 poſ^{o} p:2, quia igitur ſumma diſtribuenda æqualis fuit, manifeſtum eſt, quòd quantitates erunt proportione ſimiles, eſt aūt 4 duodecima pars 48, multiplica igitur $\frac{1}{12}$ in 1 poſ^{em} p:2. fit $\frac{1}{12}$ poſ^{is} p:$\frac{1}{6}$, hoc multiplica per numerum priorum hominum, fit $\frac{1}{12}$ q̃d^{ti} p:$\frac{1}{6}$ poſ^{is}, duc uero omnia ad 1 q̃d^{m}, fiet 1 q̃d^{m} p:2 poſ$^{b'}$, æqualia 24, accipe dimidium numeri rerum & eſt 1, duc in ſe, fit 1, adde ad 24, fit 25, ab huius ℞ minue 1 dimidium numeri rerum, fit 4, numerus hominum minor, & 6 maior, & primis obtigerunt aurei 12 pro ſingulo, alijs 8 pro ſingulo. multiplicatio autem illa, quando reducitur quadrati pars ad integrum fit per exceſſum hominum, ſcilicet 12 per 2. Et cauſa in hoc eſt, quòd proportio differentiæ ſecundæ ad primam, eſt ut aggregati quod diuidi debet ad productum ex numero hominum inuicem, uelut proportio 48 ad 24, productum ex 4 in 6, eſt uelut 4 differentię aureorum ad 2 differentiam hominū. & per hanc docuit modum operandi in quæſtionibus proportionū, ſed magis præcipue quando uolumus numerum integrum, ut in hominum numero, in quibus perabſurdum eſſet intelligere medium hominem, nedum quantitatem aliquam irrationalem uel radicem.

Qvæstio III.

Queſt. tertia.

Nunc autem proponamus quæſtiones noſtras, quarum prima eſt ſimilis præcedenti. Duæ ſocietates hominū, quarum una continebat 3 homines pluſq; altera, diuiſerunt æquales aureorum numeros, qui tamen erant 93 plus aggregato hominum, in ambabus ſocietatibus exiſtentium, & pro ſingulis hominibus ſocietatis minoris, contigerūt aurei 6 plus, quàm hominibus ſingulis maioris ſocietatis. Pones numerum primæ ſocietatis rem unam, habebit igitur ſecunda ſocietas rem & 3 p: quare ſumma aureorum, quæ eſt 93 p: utraq; ſocietate, eſt

96 p:

96 p: duabus rebus, proportio aūt excessus aureorū 6 qui contingunt societati minori, ad excessum hominum, scilicet ad 3, est ut summę aureorū, ad productum ex numero hominum primę societatis, in numerum hominū secundæ societatis, proportio autem 6 ad 3, dupla est, igitur proportio 2 pos^{um} p:96 ad 1 q̃d^{m} p: 3 pos^{b9} productum ex 1 pos^{ne} in 1 pos^{em} p: 3, est dupla, igitur dimidium 2 pos^{um} p:96, quod est v: pos^{o} p:48, æquale est, 1 q̃d^{to} p:3 pos^{b9}. abiecta itaq; 1 pos^{ne} ex utraq; parte, fiet 1 q̃d^{m} p:2 pos^{b9} æq̃le 48, ducito dimidium 2 in se fit 1, nam dimidiū 2 est 1, huic adde 48, fit 49, huius radix est 7, à qua minue 1 dimidium numeri pos^{um}, habebis æstimationem pos^{is}, & numerum primæ societatis 6, ideo numerus hominum secundę societatis, est 3, p: scilicet, horum si fiat collectio, addanturq; insuper 93, fiet numerus aureorum 108, primis igitur aurei 18, secundis 12, per capita cõtigere. Aliter & facilius expertis in operationibus positio fiat ut prius, eritq; summa aureorum 2 pos^{es} p:96. diuide per positionẽ & positionem p: 3, habebis $\frac{\text{2 pos. p:96}}{\text{1 pos.}}$ æqualem 6 p: $\frac{\text{2 pos. p:96}}{\text{1 pos. p:3}}$, igitur detracto $\frac{\text{2 pos. p: 96}}{\text{1 pos. p:3}}$ ex $\frac{\text{2 pos. p:96}}{\text{1 pos.}}$, relinquitur 6, at ex tali detractione fit $\frac{\text{6 pos. p: 288}}{\text{1 quad. p:3 pos.}}$ igitur hoc est æq̃le 6, diuisis igitur 6 pos^{b9} p:288. per 6, exibit 1 q̃d^{m} p: 3 pos^{b9}, nam si diuiso 10 per 2 exit 5, diuiso 10 per 5 exibit 2, igitur diuisis 6 pos. p:288 per 6, exit 1 positio p:48, & hæc æqualia sunt 1 quadrato p: 3 positionibus, quare ut prius, res ualet 6.

1 pos.
1 pos. p: 3.
93
---
2 pos. p:96
6 $\frac{}{2}$ 3
1 pos. p:48
1 q̃d. p: 3 pos.
---
1 q̃d. p: 2 pos. æq̃. 48

QVÆSTIO IIII.

Quęst. quarta. Est numerus, cui si addantur duæ radices, aggregato uero iterum addantur duæ radices ipsius aggregati, fiet totum 10, tunc dices, 10 ęqualis est secundo numero & duabus eius radicibus, ponemus igit̃ numerum aggregatū secundum, 1 q̃d^{m}, & hic, cū duabus radicibus, ęqualis est 10, igit̃ rei ęstimatio per secūdam regulã, est R 11 m: 1. igitur abijce duplum huius ex 10, relinquetur aggregatū 12 m: R 44, hoc autem ex supposito constat ex q̃drato & duabus radicibus, igitur 1 q̃d^{m} p: 2 pos^{b9} æquatur 12 m: R 44, ducito 1, dimidium numeri rerum in se, fit 1, adde ei numerum fit 13 m: R 44, accipe radicem, & ex ea minue 1 dimidium numeri rerum, habebis R v: 13 m: R 44 m: 1, hanc igitur duplicatam, si detraxeris ex aggregato, relinquetur numerus primus propositus, 14 m: R 44 m: R v: 52 m: R 704, & ita posses

possses regrediendo quantumlibet procedere, ab ultimo semper inchoando termino. Prolixior autem ero hic in exemplis, quoniam hæc capitula mercaturæ maxime conueniunt, tum quia tyrones in his introducuntur, uelut & paruos pueros solent magistri diligentius minuta quæque docere, tum uero quòd eadem in reliquis postmodum fabricare possumus.

14 m: ℞ 44 m: ℞ v: 52 m: ℞ 704
duc radices eius ℞ v: 52 m: ℞ 704 m: 2
aggregatum 12 m: ℞ 44
duc radices huius ℞ 44 m: 2
aggregatum 10

QVÆSTIO. V.

Inuenias numerum, à quo detracta ℞ cubica, & residuo addita sua quadrata radice, perficiatur primus numerus. Pones itaque residuum illud à quo detraxisti radicem cubicam esse 1 q̃dratum, addemus itaque ei radicem quadratam & fiet 1 q̃dratum p: 1 pos^{ne}, & hoc æquale est 1 cubo, nam ex eo quod addito ad 1 q̃dratum tantum fit quantum erat prius, igitur quod additur æquale est ei quod minuitur, minuitur autem ℞ cubica totius quantitatis, igitur pos^{o} est radix cubica aggregati, quare aggregatum est cubus, & hic ęqualis est 1 q̃d^{to} p: 1 co: deprime per 1 co: habebis 1 q̃d^{m} ęquale 1 pos. p: 1, positio igitur est ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, at numerus primus fuit cubus positionis, igitur primus numerus est ℞ 5 p: 2. Quest. quinta.

cubus ℞ 5 p: 2
q̃d^{m} 1 $\frac{1}{2}$ p: ℞ 1 $\frac{1}{4}$
pos. ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$

QVÆSTIO VI.

Quidam ter iuit ad nundinas, in primo itinere retulit duplum eius quod attulerat, in secundo cum detulisset tale duplum secum, rediit cum eisdem pecuniis, & radice earum & duobus aureis plus, hoc totum autem seruauit, rediitque cum eo ad nundinas tertio, & superlucratus est tantum, quantum esset illud quod produceretur ex pecuniis quas secũ attulerat in se ductis, ac etiã quatuor aureos plus, reuersus est autem cum 310 aureis, quęro igitur, quantum attulit secum pecuniarum, in primo itinere? Dices retulit aureos 310 & hoc fuit æquale pecuniis secundi itineris & quadrato earum & 4 p: igitur pecuniæ quas attulit secum in 3° itinere, q̃dratum earum æquantur 306 aureis, abiecto cõmuniter numero 4, ponemus igitur pecunias quas secum attulit 1 pos^{em}, & habebimus 1 q̃d^{m} p: 1 pos^{ne} æquale 306, igitur ex secunda regula, res ualet ℞ 306 $\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$, quod est dicere 17 & tot aureos detulit secum tertio itinere, & tot habuerat in secundo itinere quos seruauerat, dictum est autem, quòd in secundo itinere lucratus est radicem eorum quos attulerat & 2 p: & retulit 17, igitur si lucratus fuisset radicem tantum, retulisset 15, igitur positis pecuniis quas Quest. sexta.

ſecum attulit 1 q̃dratum, habebimus 1 q̃d^{m} p: 1 poſ: æqualia 15, igitur ex ſecunda regula, res ualet ℞ 15 $\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$, & hoc eſt quod lucratus eſt in ſecundo itinere, & cum hoc etiam lucratus eſt aureos 2, lucrum igitur totum fuit eius itineris ℞ 15 $\frac{1}{4}$ p: 1 $\frac{1}{2}$, ipſe autem retulit domum aureos 17, igitur iuit cum aureis 15 $\frac{1}{2}$ m: ℞ 15 $\frac{1}{4}$, hæ pecuniȩ ſunt quas in primo itinere ſeruauerat, & fuerant duplũ eius quod attulerat, primo igitur itinere attulit ad nundinas dimidium 15 $\frac{1}{2}$ m: ℞ 15 $\frac{1}{4}$ aureorum, quod eſt 7 $\frac{3}{4}$ m: ℞ 3 $\frac{13}{16}$ aureorum.

QVÆSTIO VII.

Queſt. ſeptima. Quidam rex proconſuli ducenti exercitum aureos miſit 128000, ut 7000 equitum & 7000 peditum cõduceret, ea erat ſtipendij ratio, ut pro ſingulis 100 aureis, ſemper 18 pedites pluſq; equites conduceret, uenit tribunus quidam militum ad proconſulem cum 1700 peditibus & 200 equitibus, quȩritur ſtipendij ratio. Hæc tertiæ quæſtioni affinis eſt, conſidera quòd 128000, ſunt 1280 centena, quia dictũ eſt quod pro ſingulis cẽtum aureis differentia numeri peditum à numero equitum ſit 18, diuide igitur 1280 in duas partes, quarum una ducta per unam quantitatẽ producat 7000, & ſimiliter reliqua ducta p eandem quantitatẽ p: 18, producat etiam 7000, igitur poſita quantitate equitum pro re, erit quantitas peditũ res & 18 p: diuiſis igitur 7000 per harum ſingulas, prouenient aggregata 1280, nam ſi ex partibus 1280 ductis in rẽ, & rem p: 18, fiunt 7000 & 7000, igitur diuiſis 7000 per rem, & 7000 per rem p: 18, exeuntia iuncta facient 1280, ex talium igitur diuiſione aggregantur $\frac{\text{poſ. }14000\text{ p: }126000}{1\text{ quad. p: }18\text{ poſ.}}$ & hoc cum ſit æquale 1280, igitur diuiſo numeratore per 1280, exit 1 q̃d^{m} p: 18 poſ. facta igitur tali diuiſiõe, prodit 10 $\frac{15}{16}$ poſ$^{b'}$ p: 98 $\frac{7}{16}$, hocq; eſt æquale 1 q̃drato p: 18 poſ$^{b'}$, igitur 1 q̃d. p: 7 $\frac{1}{16}$ poſ$^{b'}$ æquatur 98 $\frac{7}{16}$, igitur res ualet ℞ 110 $\frac{929}{1024}$ m: 3 $\frac{17}{32}$, ſed ℞ 110 $\frac{929}{1024}$ eſt 10 $\frac{17}{32}$, igitur detractis 3 $\frac{17}{32}$, relinquetur rei æſtimatio 7, & tot equites 100 aureis cõducet, & pedites 25, igitur pro 1700 peditibus ſtipendium debuit eſſe 6800 aurei, & pro 200 equitibus aurei 2857 $\frac{1}{7}$.

$\frac{7000}{1\text{ pos.}}$ $\frac{7000}{1\text{ poſ. p: }18}$

poſ. 14000 p: 126000
1 quad. p: 18 poſ.

poſ. 14000 p: 126000
1280

poſ. 10 $\frac{15}{16}$ p: 98 $\frac{7}{16}$
1 quad. p: 18 poſ.

1 q̃d. p: 7 $\frac{1}{16}$ poſition: æqualia 98 $\frac{7}{10}$

QVÆSTIO VIII.

Queſt. octaua. Fac de 20, tres quantitates proportionales, quarum ſecunda ȩqualis ſit radicibus primæ & tertiæ ſimul iunctis, pone ſecundam eſſe poſitionem, reliquum erit 20 m: 1 poſ^{ne}, quia igitur ex hoc facere oportet partes

partes duas, inter quas positio cadat proportionalis, erit ex 16^a 6^i elementorũ, ut ex una in aliam fiat q̃dratũ pos^{is}, quare per 5^{am} 2^i elementorum, seu ex regulis sexti libri, ducemus dimidium 20 m: 1 pos^{ne} in se, & fiet 100 m: 10 $pos^{b'}$ p: $\frac{1}{4}$ $q\tilde{d}^{ti}$, à quo auferemus quadratum positionis, & fiet 100 m: 10 $pos^{b'}$ m: $\frac{3}{4}$ $q\tilde{d}^{ti}$, huius radicem adde, & minue à medietate 20 p: 1 pos^{ne}, & habebis partes quas uides, ut igitur iungas radices uniuersales harũ, fac ut in 3° libro te docui, iunge primo quantitates & & habebis 20 m: 1 pos^{ne}, deinde multiplica quantitates ipsas inuicẽ, & iunge cum aggregato quantitatum earum duplum, & fit totum 20 p: 1 pos^{ne}, huius radix æquatur 1 pos^{ni}, igitur 1 $q\tilde{d}^m$ æquatur 20 p: 1 pos^{ne}, quare per primam regulam ducemus $\frac{1}{2}$ dimidium numeri rerum in se, & fit $\frac{1}{4}$, adde ad 20, fit 20 $\frac{1}{4}$, accipe radicem quæ est 4 $\frac{1}{2}$, & ei adde $\frac{1}{2}$ dimidium numeri rerum fit 5, rei æstimatio, quantitas scilicet media, quare faciemus ex residuo ad 20, duas partes inter quas cadat 5, & erunt alia positione instaurata, uel per regulas sexti libri, 7 $\frac{1}{2}$ p: R 31 $\frac{1}{4}$ & 7 $\frac{1}{2}$ m: R 31 $\frac{1}{4}$, harum radices simul iunctæ sunt 5.

10 m: $\frac{1}{2}$ pos. p: R v: 100 m: 10 pos. m: $\frac{3}{4}$ q̃d.
10 m: $\frac{1}{2}$ pos. m: R v: 100 m: 10 pos. m: $\frac{3}{4}$ q̃d.

20 m: 1 pos. aggregatum quan.
100 m: 10 pos. p: $\frac{1}{4}$ quad. m: 100 p: 10 pos. p: $\frac{3}{4}$ quad. productum quan.
æquiualens 1 quad.
producti radix 1 pos.
duplum radicis 2 pos.
aggregatum ex quantitatibus & producto 20 p: 1 pos. cuius radix est æqualis positioni.

Qvæstio. ix.

Fac de 10 duas partes, quarum maior, detractis duabus suis radicibus, æqualis sit minori, additis duabus suis radicibus, constat igitur quòd differentia maioris & minoris est, duæ radices maioris, & duæ minoris, ponatur igitur differentia hæc radix 4 pos^{um}, & ponatur pars una 5 p: R 1 pos^{is}, & alia 5 m: R 1 pos^{is}, & sumatur aggregatum, radicum harum partium, & est ex libro quarto, R uniuersalissima 10 p: R v: 100 m: 4 $pos^{b'}$, & hoc æquatur duplicatum R 4 pos^{um}, quare dimidium dimidio scilicet, R 1 pos^{is}, huic R ultimi, quare quadratũ quadrato, scilicet 1 pos^o æquabitur 10 p: R v: 100 m: 4 $pos^{b'}$ igitur 1 pos. m: 10 æquatur R v: 100 m: 4 $pos^{b'}$, quare q̃drata quadratis, quæ sunt, 1 q̃dratum p: 100 m: 20 $pos^{b'}$, & 100 m: 4 pos. igitur 1 q̃dratum est æquale 16 $pos^{b'}$, igitur pos^o æqualis 16, & nos uoluimus differentiã partium esse R 4 pos^{um}, igitur differentia partium Quest. nona.

fuit ℞: 64, quæ eſt 8, & ſic effugiſti q̄d'q̄d^{ti}, ponendo ℞ poſitionum.

QVÆSTIO X.

Queſt. decima. Fuerunt homines in tribus ſocietatibus, & numeri illorum proportionales, ductoq́ numero ſecundæ ſocietatis, in numerum tertiæ, conſurgit aggregatum omnium, cum cubo numeri primæ. Debes in hoc conſiderare, quòd perabſurdum eſt, ut tales numeri ſint irrationales, aut fracti, nam non conuenit ponere hominis partem, uide igitur in qua proportione quadratū dimidij producti ex ſecunda in tertiam ſuperat aggregatum omnium in numero aliquo q̄drato, & inuenies quòd in dupla, capiendo, 1, 2, 4. productum ex dimidio 8, qui fit ex 2 in 4, & eſt 4 in ſe, excedit 7 aggregatum in 9 numero q̄drato, & hoc uenaberis ex alia poſitione ſimplici. Pones igitur totidem res pro his numeris, ſcilicet 1 poſ^{o}, 2 poſ^{es}, 4 poſ^{es}, harum aggregatū eſt 7 poſ^{es}, adde his cubum 1 poſ^{is}, & fiet 1 cubus p: 7 poſ$^{b'}$, & hoc equatur 8 q̄dratis, producto ſecundæ in tertiam, deprime partes per poſ^{es}, fit 1 q̄d^{m} p: 7 æq̄le 8 poſ$^{b'}$, quare per tertiam regulam, duc 4 dimidiū numeri poſ^{um} in ſe, fit 16, abijce 7 numerum, relinquitur 9, huius ℞ addita uel detracta à 4 dimidio numeri rerum, oſtendit 7, & 1 æſtimationes rei. ſed quia 1 non eſt numerus ſocietatis, ideo dicemus quòd res fuit 7, & hic eſt numerus hominum primæ ſocietatis, ſecūda igitur habebit homines quatuordecim, tertia 28, conſtat autem quòd cubus, 7 cum aggregato numerorum eſt 392, & tantum producitur ex 14 ſecundo numero in 28 tertium.

1 poſ.	cubus p^{e}.	1 cub.
2 poſ.	aggreg.	7 poſ.
4 poſ.	ꝓduc. 3^{e} in 2^{am}	8 q̄d.

De modis inueniendi capitula noua. Cap. VI.



1 CVm uero diligenter conſideraſſem in his, uiſum eſt mihi, ut etiam ultra tranſgredi liceret, itaq́ exemplo deriuatiuorum, quæ iam inuenta fuerant, q̄d'q̄drati & q̄d^{ti} æqualium numero, tum etiam cub'q̄drati & cubi æqualium numero, ac reliquorum quatuor, capitulum conſtituerem q̄d'q̄d'q̄d^{ti}, & q̄d'q̄d^{ti} & numeri, inuicem æqualium, indeq́ æſtimatio rei ℞'℞ eſt, æſtimationis principalium eis correſpondentium, uelut ſi 1 q̄dratum p: 1 poſ^{ne} eſt æqualis 12, & æſtimatio rei eſt 3, ſi 1 q̄d'q̄d'q̄d^{um} p: 1 q̄d'q̄d^{to} æquantur 12, eſtimatio rei erit ℞'℞ 3, indeq́ ad excogitanda reliqua deriuatiua animum appulimus.

2 Mox uero ad alia me tranſtuli, uiſumq́ oportunum, ut æquationum naturam ſpectarē, cumq́ & primi coniuncti (ſic enim binomiū) & apo-

& apotomæ primæ (ſic enim reciſum uocamus) originem intuerer, uiſum eſt, ut in his duæ eſſent diuerſorum generum quantitates, numerus, & irrationalis pars, ſeu radix, porrò cum ad q̄dratum deducitur, numerus quidem fit ex quadratis partium in ſe, radix ex ductu unius partis in alteram bis, cubus uero conſtituitur in parte irrationali, ex triplo quadrati numeri, cum quadrato radicis in radicem. Igitur proportio partis irrationalis in cubo, ad partem irrationalem in q̄drato, eſt uelut tripli quadrati partis, quæ eſt numerus, cum quadrato partis quæ eſt radix, ad duplum numeri. at proportio tripli q̄drati numeri, ad duplum numeri, eſt ipſe numerus cum dimidio. proportio etiam q̄drati radicis, ad duplum numeri, eſt quæ prouenit diuiſo tali q̄drato per idem duplum, igitur ipſa proportio, eſt numerus ipſe cum dimidio ſui, & tali prouentu, quare aſſumptis totidem q̄dratis, erunt partes irrationales æquales, quare tot q̄drata æquabuntur cubo & numero, uelut in hoc caſu, diuido 3 quadratū radicis, per 4, exit $\frac{3}{4}$, cui addo 3, q eſt equalis numero & dimidio, fit 3 $\frac{3}{4}$, dico igitur quod in hac eſtimatiōe 3 $\frac{3}{4}$ q̄drati æquabuntur cubo & alicui numero, & eſt numerus ipſe $\frac{1}{4}$.

res 2 p: ℞ 3
q̄d. 7 p: ℞ 48
cu. 26 p: ℞ 675

Demum uolens diligentius rem perſcrutari, poſui 10 q̄drata æqualia cubo, & alicui numero, & poſui partem primam binomij (ſic enim uſus gratia appellabo coniunctum) eſſe, gratia exempli, 3, & cōſtitui partem ſecundam 1 poſ^{em}, & hæc eſt radix. quadratum igitur, eſt 9 p: 1 q̄drato, & hoc totum eſt numerus & 6 poſ^{es}, & hoc eſt radix, at in cubo ut dictum eſt fit pars irrationalis ex triplo q̄drati 3, & eſt 27, & q̄drato 1 poſ^{is} q̄d eſt 1 q̄dratum, in partem quæ eſt irrationalis, id eſt in 1 poſ^{em}, igitur 27 poſ^{es} p: 1 cubo, equātur 10 q̄dratis, in parte irrationali, id eſt decuplo 6 poſ^{um}, quod eſt 60 poſ^{es}, igiť dicemus, quòd cubus æquatur 33 poſ$^{b'}$, igitur deprimendo per poſ^{es}, q̄dratū æquatur 33, igitur res eſt ℞ 33.

3 p: 1 poſ.
9 p: 1 q̄d. p: 6 poſ.
27 poſ. p: 1 cu.
60 poſ.
1 cu. æq̄lis 33 poſ.

Regula.

Ex his tandem hæc formatur regula breuiſsima. Adde primo numero dimidium ſui, & totum abijce ex numero q̄dratorum, reſiduū duces in duplum prioris numeri, & producti ℞ eſt ſecunda pars coniuncti. Exemplum, eſt cubus qui cum numero equalis eſt 12 q̄dratis, & prima binomij pars eſt 5, adde dimidium 5 ad 5, fit 7 $\frac{1}{2}$, abijce ex 12, fit 4 $\frac{1}{2}$, duc 4 $\frac{1}{2}$ in 10 duplum 5 prioris numeri, fit 45, cuius ℞ eſt ſecunda pars coniuncti, igitur 12 q̄drata & 5 p: ℞ 45, equalia ſunt cu

bo & 40. Eadem ratione inueni, quod numerus æquationis, scilicet 40, producti ex differentia primi numeri, & numeri quadratorum, in q̄dratum primi numeri, & producti tripli primi numeri, & numeri quadratorum in quadratum radicis, est differentia.

Post hæc deuolui consilium ad explorandum qualitatem capitulorum cub' q̄drati, rerum & numeri, uidiq́ꝫ, quòd si dixero, cubus & 3 q̄drata, æqualia sunt 14 rebus, & 20 numero, & ponatur quantitas quædã intellecta, æstimatio rei, cuius prima pars sit numerus, secunda uero quantitas, alia pars irrationalis. Et sit gratia exempli, hic 1 p: ℞ 5, cõstat autem quòd coniungendo partes irrationales cubi & q̄drati, quod illæ fiunt ex duplo numeri quadratorum, in primam numeri partem, seu ex numero quadratorum, in duplum numeri, itemq́ꝫ ex triplo q̄drati numeri, & q̄drato irrationalis partis, hoc est autem æquale, in capitulo cub' q̄drati, & numeri, etiam numerum rerum conuenit, igitur ut in utroq́ꝫ pars rationalis talis sit, ut si iungantur, duplum numeri q̄dratorum, & etiam triplum sui quadrati, cum quadrato alterius partis, constituat numerum rerum. Et si pars rationalis uel numerus esset minus, oporteret ut esset differentia dupli numeri q̄drati, & tripli quadrati partis, quę est ℞ cum quadrato partis quæ est numerus, ipse numerus rerum. Exemplum, si 1 cubus p: 6 q̄dratis p: numero, æquentur 30 rebus, & pars una apotomæ, sit m: 2, tunc ducemus 6 numerum q̄dratorum, in 4 duplum 2, & fiet 24, huic addemus 30 numerum rerum, & fiet 54, & hoc debet æquari triplo quadrati, quod est 12, & quadrato alterius partis, igitur abiecto 12 ex 54 relinquitur 42, & ℞ 42 est pars prima apotomæ, quare res ualet ℞ 42 m: 2.

5 p: ℞ 45
5 — 12 — 15
7 3
25 45
175 — 135
40

res 1 p: ℞ 5
q̄d. 6 p: ℞ 20
cub. 16 p: ℞ 320

3 Est & modus alius, qui similitudinis dicitur, atq́ꝫ hic quadruplex. A natura æquationis, uelut cum capitulum cubi æqualis rebus & numero, extrahitur ex capitulo cubi & rerum æqualium numero. Ab augmentis æquationum, sicq́ꝫ capitulo non uniuersalia inuenimus q̄d' q̄drati, rerum, ac numeri. A conuersione æquationum in naturam ei æquiualentẽ, ut exponemus infra. A modo pro ędendi ad æquatiões per cuborum uel quadratorum generationem, aut per proportionem ut dupli uel dimidij, aut per additionem uel diminutionem, tres enim sunt modi uariandi in uniuersum.

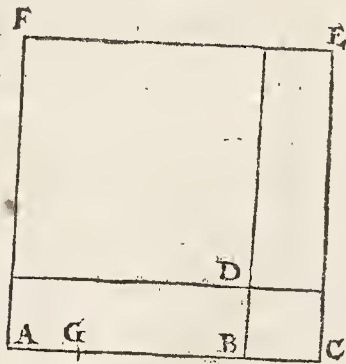
4 Est etiam transmutationis uia, qua ante demonstrationem uniuer

salia

ſalia capitula multa inueni, atq; inter reliqua, cubi æqualis q̄dratis & numero, & cubi cum q̄dratis, æqualis numero, uelut cū conamur hanc ſoluere quæſtionem, duos inuenias numeros, quorum aggregatum æquale ſit alterius q̄drato, & ex uno in alterum ducto, producatur 8, una enim uia peruenies ad 1 cubum æqualem 1 q̄drato p: 8, alia, ad 1 cubum p: 8 rebus, æqualem 64, hac igitur inuenta æſtimatione, ſi diuiſeris 8 per eam, prodibit reliqua ęquatio, ex qua in capituli illius cogitationem perueni. Quæſtiones igitur alio ingenio cognitas ad ignotas transfer poſitiones, nec capitulorū inuentio finem eſt habitura, nō tamen extra hæc, ex una quæſtione, generalia poteris aſſequi.

Cum autem intellexiſſem capitulum, quod Nicolaus Tartalea mi 5
hi tradiderat, ab eo fuiſſe demonſtratione inuentum Geometrica, cogitaui eam uiam eſſe regiā, ad omnia capitula uenanda. Itaq; ad eam tria ſuppoſita maxime utilia pręmittere inſtitui, quorum dilucida declaratione, reliqua, quę & ipſa demonſtrabuntur, facile erit intelligere, eſt autem horum hoc primum.

Si quantitas in duas partes diuidatur, cubus totius æqualis eſt, 6
cubis ambarum partium, triploq; productorum, uniuſcuiuſq; earū, uiciſſim in alterius q̄dratū. Quamuis hoc & reliqua duo quæ ſequuntur in 7° noſtro ſuper Euclidem libro oſtenſa ſint, ne tamen huic operi quicq; deeſſet, placuit hic denuo demonſtrare. Sit igitur A C, diuiſa in puncto B, & ſit cubus totius A E, ſint etiā in baſi eius ſupficies diſtinctæ, D A, D C, D F, D E. manifeſtum eſt autem ex 4ª 2ⁱ elementorum, C D eſſe quadratum B C, & D F quadratum A B, & duo rectangula A D & D E, fieri ex A B in B C, ſingula, cubus autem totus conſtat ex A C linea, in q̄dratum A E, quare ex A C, in ſuperficies D A, D C, D E, D F, componentes A E, quare cum A C conſtet ex A B & B C, conſtabit cubus A E, ex octo corporibus, quorum quatuor conſtant ex A B linea in ſuperficies D A, D C, D E, D F, reliqua quatuor, ex B C linea, in eaſdem quatuor ſuperficies. At ex A B in F D, fit cubus A B, & ex B C in C D, cubus B C, conſtat igitur cubus A E, ex cubis A B & B C, & ex eo quod fit ex A B in D A, D C, D E, & eo quod fit ex C B in D A, D F & D E, at quod fit ex A B in C D, æquale eſt ei q̊d fit ex B C in D A, & quod fit ex B C in D F, ęquale ei, quod fit ex A B in A D, eo quod altitudines & baſes eædem ſunt, parallelepipeda etiam ex A B in A D, uel D E æqualia ſunt inuicem, ſimiliter ex B C in A D, uel D E, inuicem æqua-



æqualia, eo quòd D A & D E ſunt æquales ſuperficies, ex 43ª primi elementorum, igitur cubus A C conſtat ex cubis A B & B C, & triplo A B in quadratū B C, & triplo B C in quadratū A B, quod erat probandū.

7 Ex hoc patet ſecundum, ſcilicet, quòd cubus A B, cum triplo A B in quadratum B C, ſuperat cubum B C cum triplo B C in quadratū A B, in cubo differentiæ A B & B C, ſit igitur A G æqualis B C, & erit differentia A B & B C, linea G B, conſtat autem ex precedente cubum A B, æqualem eſſe cubis A G & G B & triplo A G in quadratum G B, & triplo G B in quadratum A G, quare cubus A B cum triplo A B in quadratum B C, æqualis eſt cubis A G & G B, & triplo A B in quadratum G B, & triplo G B in quadratum A G, & triplo A B, in quadratum B C, uerū cubus A G æqualis eſt cubo B C, & triplum B G in quadratum A G, æquale eſt triplo B G in quadratum B C, & triplum A G in quadratum G B, æquale eſt triplo B C in quadratum B G, eo quòd B C æqualis eſt A G, cubus igitur A B, & triplum A B in quadratum B C, æqualia ſunt cubo B C, & B G, & triplo B G in quadratum B C, & triplo B C in quadratum B G, & triplo A B in quadratum B C, at ex B G in quadratū B C, fit quantum ex B C in rectangulum ex B G in B C ter, igitur ex B G in quadratum B C, æquale ei quod fit ex B C in rectangulū ex B C in B G ter, eadem ratiōe, quod ex A B in B C quadratum ter, æquale ei quod ex B C in rectangulum ex A B in B C ter, cubus igitur A B, & triplum A B in quadratum B C æqualis eſt cubis B G & B C, & triplo B C in rectangulum B C in A B, & triplo B C in rectangulum ex B C in B G, & triplo B C in quadratum B G, at ex 4ª 2^{i} elementorum, rectangulum ex B C in B A, & ex B C in B G, cum quadrato B G æquantur quadrato A B, igitur cubus B G cum cubo B C, & triplo B C in quadratum A B æqualia ſunt cubo A B, & triplo A B in quadratum B C, quare cubus A B, cum triplo A B in quadratum B C, excedunt cubum B C, cum triplo B C in quadratum A B, in cubo differentiæ B G.

Cor^{m}. primū. Ex hoc patet, quòd ſi B C ponatur m: quòd cubus A B conſtabit ex cubo A C & triplo A C in quadratum B C, addito per m: cubo B C, & triplo B C in quadratum A C, nam ſi B C fuiſſet p: differentia cubi A C cum triplo A C in quadratum B C, à cubo B C & triplo B C in quadratum A C, fuiſſet cubus A B, ex demonſtratis. Sed poſita B C m: tantum eſt quod aggregatur, quanta eſt differentia poſita B C p: igitur cubus A B, eſt aggregatum cubi A C & tripli A C, in quadratū B C, & tripli B C in quadratum A C m: & cubi B C m: Et eodem modo, ſi A B poneretur m: cubus B C conſtaret ex cubo A C, & triplo A C in quadratū A B, & triplo A B, in quadratum A C per m: & cubo A B per m:

Eodem

Eodem modo, si A B ponatur m: cubus A B componetur ex cubo B C, & triplo B C in quadratum A C, & cubo A C per m: & triplo A C in quadratum B C per m: nam ut dictum est, cubus A B, est differentia talium partium per p: ex primo corrolario, igitur detracto maiore ex minore, fiet tantundem m: sed cubus A B m: est æqualis cubo A B p: in numero, ut em̃ 27 p: est cubus 3 p: ita 27 m: est cubus 3 m: igitur cubus A B m: est æqualis cubo B C & triplo B C in quadratum A C, & cubo A C m: & triplo A C in quadratum B C m: Corm. secũd.

Ex primo autem supposito, ostenditur etiam hoc tertium, quod est, proportionem aggregati ex cubis A B & B C ad triplum productorum A B in quadratum B C, & B C in quadratum A B esse, ut trium linearum in proportione continua, A B & B C existentium aggregati primæ & tertiæ, detracta secunda, ad triplum secundæ. constat em̃ ex 32^a 11^i elementorum, quòd proportio cubi A B ad corpus ex A C in quadratum A B, est ut quadrati A B ad A D superficiem, quare ex p^a. 6^i. elementorum, ut A B ad B C, eadem ratione parallelepipedi ex B C in quadratum A B ad parallelepipedum ex A B in quadratum B C, proportio, ut A B ad B C, atq; rursus parallelepipedi, ex A B in quadratum B C ad cubum B C, ut A B ad B C. Quatuor igitur corpora, scilicet cubus A B, parallelepipedum, ex B C in quadratum A B, parallelepipedũ ex A B in quadratum B C, & cubus B C sunt in continua proportione linearum A B & B C. Statuamur itaq; hæc corpora breuitatis causa in quatuor literis H, K, L, M, ita ut H sit cubus A B, & K parallelepipedum ex B C in quadratum A B & L parallelepipedũ ex A B in quadratum B C, & M sit cubus B C, igitur cum ratio M ad L sit ea quæ L ad K, ut probatum est, item K ad L, ut H ad K, erit ex 24^a 5^i elementorum, K M ad L, ut H L ad K, quare ex 12^a eiusdem, H K L M, ad K L, ut H L, ad K, quare ex 19^a eiusdem, H M ad K L, ut H L detracto K, ad K, quare ex 22^a eiusdem, H M ad triplum K L, ut H L dempto K ad triplum K, at cum H K L, sint in proportione A B ad B C, ut probatũ est, erit ex 11^a eiusdẽ 5^i elementorum, cuborum A B & B C, simul iunctorũ, ad triplum A B in quadratum B C, & B C in quadratum A B, uelut primæ & tertię trium linearũ proportionalium, in proportione A B & B C, detracta media ipsarum, ad triplum ipsius mediæ. 8

H, K, L, M.

Ex hoc patet, quòd proportio tripli B C in quadratum A B, ad triplum A B in quadratum B C, est ut A B ad B C, ex 12^a 5^i el. Corm. tertiũ.

Atq; etiam, quòd proportio cuborum A B & B C, cum duplo B C in quadratum A B, & A B in quadratum B C, ad residuum totius cubi quartũ Corm.

A C, est ut trium superficierum D C, D A, D F, ad D E superficiem, seu ut trium quantitatum proportionalium in proportiõe A B ad B C, ad mediam ipsarum, ac multa alia quæ breuitatis causa omitto.

De capitulorum transmutatione. Cap. VII.

1 Vm fuerit numerus & denominatio media, extremæ æqualis, conuertetur capitulum in duas denominationes easdem, & sub eadem magnitudine numero æquales, uelut si dicam, quadratum æquatur 6 radicibus & 16, dicemus igitur etiam, quadratum & 6 radices, æquantur 16, manetq; conuersa ratio, inde habita prima æquatione, detrahemus numerum radicum, & est 6, & habebimus secundam, uel secunda habita, addemus 6 numerum radicum, & fiet æquatio prima, uerum in cæteris denominationibus regula generalis dari non potest.

2 Verum generalis est regula, cum media denominatio, numero & extremæ denominationi æquatur, tunc conuertetur in aliam mediam denominationem, tantundem à numero distantem, quantum prior media ab extrema denominatione distabat. Sic pro exemplo, si cubus & numerus æquales sint rebus, cubus cum eodem numero, quadratis etiam equabitur, sed non sub rerum numero existentibus. Ratio uero habendi mediam denominationem est, deprime maiorem denominationem ex medijs, per minorem, & radicem numeri æquationis, sumptam secundum naturam denominationis extremæ, reduces ad denominationem quæ exijt, & cum eo numero, multiplicabis numerum denominationis mediæ proximioris maximæ denominationi extremæ, aut diuides numerum proximioris numero, & qui exit, numerus est denominationis mediæ, uelut si cubus & 16 æquentur 6 quadratis, erit ex dictis cubus & 16, æqualia rebus. harum numerum sic uenabimur, deprime q̃dratum per res, exeunt res, accipe ℞ cub: 16, nam cubus est extrema denominatio, & eam reduc ad naturam rei, cum res sit id, quod prouenit, diuiso quadrato per rem, fiet igitur ℞ cub. 16, quoniam res non auget nec minuit, igitur ducemus ℞ cub. 16 in 6 numerum quadratorum, qui sunt proximiores cubo, quàm numero, & fient res ℞ cub. 3456 æquales 1 cub. p: 16. Exemplum aliud, cubus & 8 æquantur 18 rebus, dices igitur, cubus & 8, æquantur quadratis, diuide igitur quadratum per rem exit res, accipe ℞ cubicam 8, quia cubus est maxima denominatio, & est 2, ea non est deducenda aliter, cum res sit denominatio exiens, fiet igitur 2 diuisor 18 numeri rerum,

rum, quia res sunt proximiores numero, quàm cubo, & exibit 9, numerus quadratorum æqualium cubo p: 8, eodem modo, si dicamus 1 q̄d'q̄d^m p: 64 ęq̄tur 10 cubis, cadet transmutatio rebus in 1 q̄d'q̄d^m p: 64 ęquale rebus, diuide igitur cubū per rem exit quadratum, duc ℞'℞ 64 quæ est ex natura q̄d'q̄d^ti, & est ℞ 8, ad naturam quadrati, scilicet denominationis exeuntis, fit 8, quē duc in 10, numerum cuborum, quia sunt proximiores maximæ denominationis, & fiunt res 80, cōtra diuide res 80 per 8 ad habendum numerum cuborum.

1 q̄d'q̄d. p: 64	10 cub.
1 q̄d'q̄d. p: 64	rebus
℞ 8	q̄d. 8
	10
	res 80

Eadem ratio tenet, ubi denominatio media cum numero, æquatur extremæ, seu duæ denominationes extremæ, numero æquales fuerint, nam eadem regula unam æquationem in aliam transmutabimus. Vt pro exemplo, cubus ęquetur 9 rebus p: 10, dicemus igitur, cubus p: q̄drato ℞ cubicæ $72\frac{9}{10}$ æquantur 10, & si cubus ęquatur 6 q̄dratis p: 16, erit cubus & res ℞ cub. 3456, æqualis 16. Et si cubus p: 18 rebus, æquatur 8, erit cubus æqualis 9 q̄dratis & 8 numero. Et cum relatum primum p: 6 cubis æquatur 80, erit relatum primū æquale quadratis p: 80. diuide igitur cubum per quadratum, exit res, sume ℞ relati 80, & eam reducito ad naturam rei remanet ℞ relati 80, quam ducito in 6 numerum cuborum, fit ℞ relati 622080, numerus quadratorum, igitur R^m p^m æquatur q̄dratis ℞ relati 622080 p: 80 numero, eadē ratione, si R^m p^m p: 30 rebus, æquale sit 32 numero, tunc erit R^m p^m æquale q̄d'q̄drato & 32 numero, diuide q̄d'q̄d^m per rem, exit cubus, reducito 2 ℞ relati 32 ad cubum, fit 8, diuide 24 numerum rerum per 8, exit 3 numerus q̄d'q̄dratorum, qui cum 32 æquantur relato primo. 3

R^m p^m p: 6 cub.	80
R^m p^m q̄d. p:	80
R rel: 80 — res ℞ rel: 80	
	6
q̄d. ℞ rel: 622080	

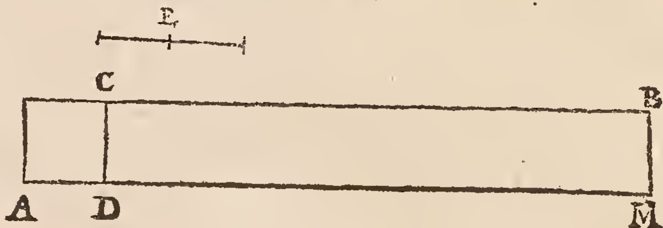
Sed pro habenda æstimatione in singulis, diuides q̄dratum radicis numeri ęq̄tionis, sumpta ipsa radice, secundum naturam maximę denominationis, per æstimationem quam habes, quod exit est æstimatio conuersi capituli. Exemplum, dictum est, quòd si cubus & 8 æquatur 18 rebus, cubus & 8 æquabitur 9 q̄dratis. In prima autem æquatione res ualet 4, uel ℞ 6 m: 2, dico, quod si acceperis ℞ cubicā 8, quæ est 2, & duxeris eam in se fit 4, & diuiseris per priores æstimationes, scilicet 4, uel ℞ 6 m: 2, exibunt 1, uel ℞ 24 m: 4, ęstimationes cubi p: 8 æqualium 9 q̄dratis. Et eodem modo dictum est, quod si R^m p^m p: 6 4

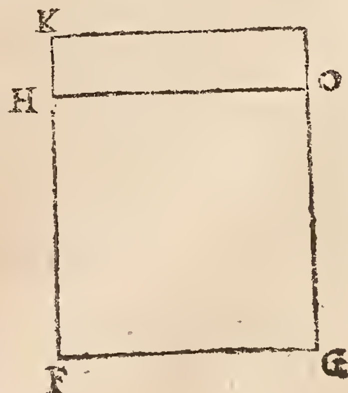
cubis, æquatur 80, quod R^{m} p^{m} æquabitur ℞′ R^{a}, 622080 quadratorum p: 80, & in prima æquatione æſtimatio rei manifeſte eſt 2, duc igit̃ ℞ R^{2} 80 in ſe, fit ℞ R^{a} 6400, diuide per 2, æſtimationem relati & 6 cuborum æq̄lium 80, exibit ℞ R^{a} 200, æſtimatio rei, quando R^{m} p^{m} æquatur ℞ R^{c} 622080 quadratorum p: 80, ut uero facilior intellectus omnium horũ ſit, uigintiquatuor tranſmutationes ſubiungam, ex quibus alias diſcere licebit. hic namq́ duodecim ſunt conuerſiones, totidemq́ econtra, uelut ſi cubus & quadratum æquantur numero, conuertetur capitulum, in cubum æqualẽ rebus & numero, at econtra, ſi cubus æqualis ſit rebus & numero, cubus & quadrata numero etiam æqualia erunt.

cub. & q̄d′ æq̄l′ n° in cub. æq̄l′ re & n°.
cub. æq̄l′ q̄d′ & n° in cub. & res ęq̄l′ n°.
cub. & n^{s} æq̄l′ q̄d′ in cub. & n^{m} æq̄l′ rebus
q̄d′q̄d. & cub. æq̄l′ n° in q̄d′q̄d. ęq̄l′ reb′ & n°.
q̄d′q̄d. & n^{s} æq̄l′ cu. in q̄d′q̄d. & n^{m} ęq̄l′ rebus.
q̄d′q̄d. æq̄l′ cu. & n° in q̄d′q̄d. & res æq̄l′ n°.
R^{m} p^{m} & q̄d′q̄d. ęq̄l′ n° in R^{m} p^{m} ęq̄l′ reb. & n°.
R^{m} p^{m} æq̄le q̄d q̄d. & n° in R^{m} p^{m} & res ęq̄l′n °.
R^{m} p^{m} & n^{s} ęq̄l′ q̄d′q̄d. in R^{m} p^{m} & n^{m} ęq̄l′ reb^{9}.
R^{m} p^{m} & cu. æq̄l′ n° in R^{m} p^{m} æq̄l q̄d. & n°.
R^{m} p^{m} æq̄l cu. & n° in R^{m} p^{m} & q̄d. æq̄l′ n°.
R^{m} p^{m} & n^{s} æq̄l′ cu. in R^{m} p^{m} & n^{m} æq̄l′ q̄d.

DEMONSTRATIO.

Vt uero eiuſmodi ſit aliqua, exempli cauſa, demonſtratio, ponatur parallelepipedum A B conſtans ex A C cubo, & D B numero, æquale autem totum hoc q̄dratis A D lineæ. Igitur cum ipſum cõſtet ex D C in A B, conſtabit etiam ex A M in quadratum D C, igitur A M eſt numerus quadratorũ, inter M D & D A, ſint continue proportionales, E proximior A D, & F G proximior D M, q̄dratum autem F G ſit G H, & ſit G K ſuperficies, æqualis ei quæ ex E in A M, compleatur autem corpus G K, ſecundum altitudinem F G, erit igitur ex 15^{a} 6^{i} elementorum A M ad F K, ut F G ad E, igitur ex 11^{a} 5^{i} eiuſdem, A M ad F K, ut M D ad F G, ſeu F H. at ex 19^{a} 5^{i} elementorum erit A M ad F K, ut A D ad K H, ex 11^{a} igitur eiuſdem, M D ad F H, ut A D ad K H, quare cum ſit M D, ad F H, ut F H ad





E, &

E,& F H ad E,ut E ad A D,& E ad A D,ut A D ad K H, erunt quinꝗ lineæ M D,F H, E,A D,H K,continue proportionales,igitur ex 34^a 11^i elementorum & 17^a 6^i erit G H ad A C,ut M D ad H K,utraꝗ enim duplicata ei,quæ eſt F H,ad A D, quare quod ex D M quinta in A C quadratum ſecundæ,æquale eſt ei,quod ex K H prima in G H quadratū quartæ.Igitur corpus K O eſt numerus propoſitus,& cum cubo B G æquatur rebus totidem,quot ſunt in ſuperficie G K,at G K æqualis eſt ſuperficiei ex C in A M,eſt autem E radix cubica numeri D B, propoſiti, ex 34^a 11^i elementorum,& A M numerus quadratorum, ut propoſitum eſt,igitur numerus rerum G K fit ex radice cubica numeri æquationis in numerum quadratorū, & numerus ęquationis manet idem ſcilicet corpus K O & B D,quorum unum alteri ęquale eſſe demonſtrauimus. Supereſt itaꝗ,ut oſtendamus ęſtimationem rei, quę eſt A D in uno,& F G,in altero eſſe,quales proponuntur,cadit enim inter eas proportionalis media E radix cubica numeri propoſiti,igitur ex 16^a 6^i elementorum diuiſo quadrato E per unam earum exibit reliqua.Eodem modo probaremus reliquam partem regulę,& generaliter,ſed breuitati conſulendum eſt,in his quæ ordinem habent eum,ut unum ex altero cognoſcatur.

Regvla.

Eſt & alius tranſmutandi modus,manente quidem denominatio- 6
num numero,uariato autem ęquationis numero,uerū in reliquis eandem habet rationem,regula igitur eſt. Accipe radicem numeri æquationis,ſecundum naturam denominationis mediæ,quā habes, & eam reduces multiplicando ad naturam denominationis mediæ,quam uis æquari extremis in conuerſione,& hic eſt numerus in ſecunda æquatione.Exemplum,ſi dico,cubus & 8 æquatur 18 rebus , tu ſcis ex tabula ſupraposita,quæ huic ſeruit regulæ,quod tranſmutatur in cubū & numerum æqualia quadratis,at ex hac regula liquet,quòd numerus quadratorum æquatur numero rerum, erunt igitur cubus & numerus æquales 18 quadratis,pro numero igitur ęquationis accipe 8, quia res non habent radicem,& duc in ſe,fiet 64, numerus æquationis,duxiſti autem in ſe,quia denominatio media in quam fienda eſt tranſmutatio,eſt quadratum.Eadem ratione,ſi dicatur, 1 q̄d'q̄dratū p: 8,æquatur 12 rebus,traducetur in q̄d'q̄dratum & numerum æqualia cubis,quare reducemus 8 ad cubum & fiet 1 q̄d'q̄dratum p: 512, æquale 12 cubis.Et ita,ſi dicatur, 1 p^m R^m p: 8,æquatur 5 cubis,tranſmutatio fiet in R^m p^m p: numero,æquale 5 quadratis,ex tabula uel regula,igitur pro numero (quia denominatio media in propoſito eſt cubus) ſumemus R cub. 8,quæ eſt 2,& eam deducemus ad naturā quadrati

drati, quia quadratum eſt denominatio media in tranſmutatione, fiet igitur 4, quare erit R^{m} p^{m} p:4, æquale 5 quadratis.

7 Eadem ratio tenet, cum numerus & media denominatio extremę æquantur, ut tranſmutetur in capitulum denominationum æqualium numero. Exemplum, ſi dicamus, 1 p^{m} R^{m} p:4 cub. æquatur 64, accipiemus propter cubum ℞ cubicam 64, & eſt 4, & eam reducemus ad quadratum denominationem mediam, in quam fienda eſt tranſmutatio, & habebimus 1 p^{m} R^{m} æquale 4 q̃dratis & 16 numero, & ſi 1 p^{m} R^{m} p:4 rebus æquatur 5, quia res non habet radicẽ, reducito 5 ad naturam quadratiquadrati, & fit 625, ideo dicemus, quòd 1 R^{m} p^{m} æquatur 4 quadratisquadrati p:625.

8 Aeſtimationis ratio ſic habetur in media denominatione æquali extremæ & numero. Reducito æquationem quam habes in naturam denominationis mediæ, in quam fienda eſt traſmutatio, & hoc abiJce ex numero denominationis medię, & ℞ reſidui, ſumpta ſecundum naturam denominationis mediæ, ex qua fit tranſmutatio, eſt rei æſtimatio. Exemplum, ſi p^{m} R^{m} p:64 æquatur 12, cubis dicemus p^{m} R^{m} p: 16 æquatur 12 q̃dratis, ęſtimatio primę ęquationis eſt 2, & quia media denominatio in quam fit tranſmutatio eſt q̃dratum, ducemus 2 in ſe fit 4, abiJce ipſum ex 12 numero cuborum, fit 8, reſiduum cuius ſumemus ℞ ſecundum naturam denominationis mediæ, ex qua fit tranſmutatio, & eſt cubus. igitur ℞ cub. 8, quæ eſt 2, erit etiam æſtimatio rei in ſecunda æquatione.

1 p^{m} R^{m} p: 64	12 cub.
1 p^{m} R^{m} p: 16	12 q̃d.

Aliud Exemplum, ſi p^{m} R^{m} p: 64, ęquatur 24 q̃dratis, tu ſcis, quòd tranſmutatur in p^{m} R^{m} p: 512 æquale 24 cubis, æquatio autem primi propoſiti fuit 2, cubus fit 8, nam media denominatio ſecunda eſt cubus, abiJce 8 ex 24, numero q̃dratorum, relinquitur 16 cuius ℞ quadrata, id eſt ſumpta ſecundum naturam denominationis mediæ, primæ æquationis, quæ eſt 4, eſt æſtimatio p^{i} R^{i} p:512 æq̃lis 24 cubis.

1 p^{m} R^{m} p: 64	24 q̃d.
1 p^{m} R^{m} p: 512	24 cu.

9 Sed ubi intermedia denominatio iungitur numero uel extremæ denominationi, facto tranſitu in comparem, ex 7^{a} regula, reduces ut prius æſtimationem quam habes in naturam denominationis medię, cuius quæris æſtimationem, & ei adde numerum denominationis mediæ, ſi media denominatio cuius æſtimatio quæritur, iuncta fuerit numero, uel minuemus, ſi iuncta fuerit extremæ denominationi, & eius aggregati uel reſidui ℞ ſumpta, ex natura denominationis mediæ, cuius æſtimatio cognita eſt, erit æquatio ſecundæ quæſtionis quæſita. Exemplum, ſit R^{m} p^{m} æquale 3 cubis p:8, & æſtimatio rei cognita 2, & tranſ-

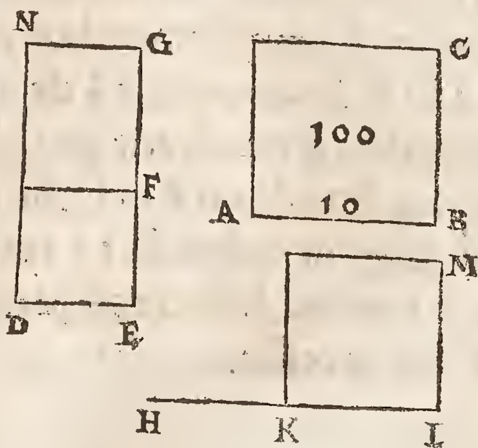
& transmutatur ex regula septima in R^m p^m p:3 quadratis æqualia 4, reduco igitur 2 ad naturam quadrati mediæ denominatiõis, cuius queritur æstimatio. Sit 4, ex hoc abijcio 3 numerum quadratorum, quia quadrata sunt iuncta R^o p^o, & non numero, relinquitur 1, huius R cub. quæ est 1, est rei æstimatio, est autem cubus denominatio media æquationis iam cognitæ. Rursus sit R^m p^m ęquale 7 q̃dratis p:4, & sit transmutatio in R^m p^m p:7 cubis æquale 8, ex 7^a regula, & sit huius cognita æquatio, quæ sit 1, & uelim reliquam, reduco 1 ad q̃dratum, mediam denominationem ignotam, & fit 1, huic addemus 7 numerus q̃dratorum, quia media denominatio ignota, quæ est q̃dratum, iungitur numero, scilicet 4, & habebimus 8, huius R cubica sumpta ex natura mediæ denominationis cognitæ, & est 2, talis R cubica, est rei æstimatio, quando p^m R^m æquatur 7 q̃d. p:4.

R^m p^m	3 cub. p:8	
R^m p^m p: 3 q̃d.		4
R^m p^m p:7 cub.		8
R^m p^m	7 q̃d. p:4	

Ex hoc patet, quòd semper, habito uno capitulo, per secundam, tertiam & quartam regulam, uel per sextam, septimã, octauam, & nonam, habebimus aliud generaliter, si generaliter, uel particulatim, si particulatim. Exemplũ igitur tale sit, cognito capitulo cubi & rerum æqualium numero, proponatur cubus æqualis 3 quadratis & 10 numero, habebimus igitur ex septima regula cubum & 3 res æquales R 10, æquatio huius est R v: cub. R 3 $\frac{1}{2}$ p: R 2 $\frac{1}{2}$ m: R v: cub. R 3 $\frac{1}{2}$ m: R 2 $\frac{1}{2}$ huius igitur quadratum, addito 3 numero quadratorum, quia quadrata iunguntur numero, erit æstimatio cubi æqualis 3 q̃dratis & 10 numero, & hoc est, quia denominatio media cognita, quæ est res, non habet ex se radicem, & sic primo generaliter capitulum cubi æqualis q̃dratis & numero, aliaq́ multa capitula inueni, duplici uia. Cor^m 4

DEMONSTRATIO.

Et ne hoc uoluntarium uideatur, demonstratio huius adijcienda est, in uno pro omnibus, sit cubus D F, cum A B numero, ęqualis D G numero rerum, id est corpori D G, sit autem H L, numerns rerum, æqualis D G superficiei, in numero, & sit quod ex H K in K M, ęquale A C numero, & quadrato A B, erit igitur quod ex H L in K M, ęquale A C & cubo K L, & similiter, quod ex D E in D G, ęquale cubo D E, & numero A B, D E autẽ est latus D F, & K L latus K M, sed H L æqualis est D G, cum igitur ex H K in K M fiat A C, & ex D E in F N, A B, 10



posita

posita N F radice K M, & D E radice H K, nescio si ex D E in F N, fit A B, ex H K in K M fit A C, nãq; hoc à Theone in Euclidis cõmentario est demonstratum, igitur cum æstimatio rei in uno sit K L, in altero D E, sequitur ut sublata F D, æquali H K (utraq; enim æquatur quadrato D E) ex H L, relinquatur K L, rei æstimatio, quod est propositum.

11 Est & genus transmutationis in dissimile, ut cum q̃d'q̃d^m æquatur rebus & numero, & res est ℞ 5 p: 2, gratia exempli, erit q̃d'q̃d^m p: eisdem rebus æquale eidem numero, & res erit eius apotome, uidelicet ℞ 5 m: 2, & econtra.

12 Transmutantur & ea, quæ constant ex quatuor nominibus, cum fuerint tres partes continue proportionales, & æquales rebus uel cubis, dico autem, numerus & q̃dratum & q̃d'q̃d^m, nam diuiso numero rerum per ℞ numeri, exit numerus cuborum, multiplicato uero numero cuborum, per ℞ numeri, producitur numerus rerum æqualium q̃d'q̃drato & q̃drato & numero eisdẽ, uelut, si q̃d'q̃d^m p: 8 q̃dratis p: 64, æquantur 10 cubis, igitur ducto 8 ℞ 64, in 10 numerum cuborũ, erit 1 q̃d'q̃d^m p: 8 q̃dratis p: 64, æquale 80 rebus. Habita autem una æquatione, diuide cum ea ℞ numeri, quod exit, est reliqua æquatio, uelut 1 q̃d'q̃d^m p: 8 q̃dratis p: 64, æquatur 56 rebus, & res est 4, erit 1 q̃d'q̃d^m p: 8 q̃dratis p: 64 æquale 7 cubis, inde diuiso 8 radice 64, per 2 priorem æquationem, exit 4, secunda æquatio, q̃d'q̃drati p: 8 q̃dratis p: 64, æqualium 7 cubis.

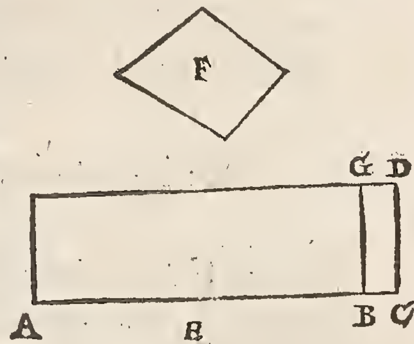
13 Est etiam transmutatio capitulorum ex tribus constantium, in capitula ex quatuor, & pro exemplo, regulam unam exponam, si sit capitulum cubi & numeri æqualium q̃dratis, conuertetur in capitulum cubi & rerum, æqualium q̃dratis & numero, hoc modo, manente numero q̃dratorum, duc dimidium numeri q̃dratorum in se, & productũ est numerus rerũ, quæ sunt cũ cubo, & octaua pars prioris numeri est semper numerus, qui est cum q̃dratis, & æquatio semper manet eadem. Exemplum, cubus p: 16 æquatur 14 q̃dratis, duc 7 dimidium 14 in se, fit 49, accipe $\frac{1}{8}$ de 16, quod est 2, habebis 1 cub. p: 49 rebus æqualẽ 14 quadratis p: 2. Aliud, cubus & 40, æquatur 8 quadratis, duc 4 dimidium 8 in se, fit 16, numerus rerum, accipe $\frac{1}{8}$ de 40 quod est 5, igitur cubus & 16 res æquantur 8 quadratis p: 5, & æquatione una inuenta, habes reliquam cũ sint eædem, demonstratio huius non est hic necessaria.

Docetur æquatio generaliter mediæ denominationis æqualis extremæ & numero. Cap. VIII.

Demonstatio.



It inquam, cubus quadrati & numerus F æqualis aliquibus rebus, & sit numerus rerum A D, & sit B D portio, ex qua sumpto latere, quale relati primi E, & ducto in A G reliquũ numeri rerum, fiat F numerus æquationis, dico E esse rei æstimationem, nam quia ex supposito, ex E in A G, fit F, & ex E in B D, fit cub. E, eo quod E fuit latus relatum, B D, & productum ex E in A G, & in B D, æquale est producto ex E in A D, sequitur cum A D, sit numerus re℞, quod res æquantur cubo quadrato, & numero F, existente æstimatione ipsius E. 1



Regula.

Secundum hoc formabitur regula, cum fuerint denominatio media & numerus, æquales mediæ, & ex nume ro mediæ denominationis, feceris duas partes, ex quarum una in radi cem alterius, sumptam secundum naturam denominationis, prouenientis ex diuisione extremæ per mediam, & deductam ad naturam ipsius mediæ denominationis, fiat numerus æquationis, tunc radix ipsa anteq́ deducetur ad naturam denominationis mediæ, est rei æstimatio. Exemplum, 10 res, æquantur quadrato & 21, tunc quia res sunt immediatę quadrato & numero, sufficit facere de 10 duas partes, ex quarum una in aliam fiat 21, & erunt 7 & 3, & utraq́ est rei æstimatio. Aliud, 10 res, æquantur cubo & 3, hic res est coniuncta numero, sed non cubo, cum intermediet quadratum. Ideo diuidemus cubum per rem, exit quadratum, dicemus igitur fac ex 10, duas partes, ex quarum una in quadratam alterius radicem, fiat 3, & erunt 1 & 9, nã ex 1 in 3 ℞ 9 fit 3, ideo talis ℞ scilicet 3, est rei ęstimatio. Aliud, 10 cubi æquales sunt q̃d'q̃drati, & 64, iam hic cubus hæret q̃d'q̃drato, & à numero distat intermediantibus q̃drato & re, dices igitur, fac de 10 duas partes, ex quarum una in alterius cubũ, producatur 64, & erunt partes 8 & 2, qui ad cubum deducendus est, igitur 2 est rei ęstimatio, scilicet quòd oporteat semper numerum cum quo operamur, esse rei æquationem. Aliud, & est quarti modi exemplum, 10 cubi æquantur p° R° & 48, tũc iam cubus distat à R° p°, intermedio q̃d'q̃drati, & à numero interpositis quadrato & re, diuide igitur R^{m} p^{m} per cubum, 2

exit quadratum, dicemus, fac de 10 numero mediæ denominationis duas partes, ex quarum una, in cubum radicis quadratæ alterius producatur 48 numerus æquationis, & erunt partes 6 & 4, nam ex 6 in 8 cubum 2 radicis quadratę 4, fit 48, ideo ipsum 2 radix quadrata 4, est rei æstimatio. Manifestum est igitur, quod semper sumimus radicem ex natura denominationis, secundum quam media in maiore continetur, & deducimus eam ad naturam ipsius mediæ, & qui scit hoc facere, nouit capitulum, & qui nouit capitulum, scit etiam hoc facere.

3 Est uero manifestum, quod cum media denominatio, extremæ & numero æqualis est, tunc in omnibus, præterquam in maximo numero, duas æstimationes necessario habet.

De secunda incognita quantitate non multiplicata. Cap. IX.



Eneraliter hucusque noua inuenta tractauimus, nunc uero de singulis dicendum speciebus est, namque sæpius illud occurrit, ut quæstionem propositam, duplici positione soluamus. Eiusmodi autem est exemplũ, quando aliter uix rem hanc possumus explicare. Tres erant uiri pecunias habentes, Primus cũ dimidio reliquorum habuit aureos 32. Secundus cũ reliquorũ tertia parte 28. Tertius cũ reliquorum parte quarta 31, quæritur quantum quisque habuit? Statuemus primo rem ignotam primam, secundo secundam rem ignotam, tertio igitur 31 aurei, minus quarta parte rei, ac quarta parte quantitatis relicti sunt, iam igitur uide, quantum habet primus, equidem si illi dimidium secundi & tertij adijcias, habiturus est aureos 32, habet igitur per se aureos 32 m: $\frac{1}{2}$ quan: m: 15 $\frac{1}{2}$ p: $\frac{1}{8}$ pos^{is} p: $\frac{1}{8}$ quant: quare habebit 16$\frac{1}{2}$ m: $\frac{3}{8}$ quant^{is} p: $\frac{1}{8}$ pos: hoc autẽ cum sit equale uni positioni, erit $\frac{7}{8}$ pos: & $\frac{3}{8}$ quant: æquale 16$\frac{1}{2}$, quare deducendo ad integra 7 pos: & 3 quant: æquabuntur 132. Rursus uideamus, quantum habeat secundus, habet hic 28, si ei tertia pars primi ac tertij addatur, ea est $\frac{1}{3}$ pos: p: 10 $\frac{1}{3}$ m: $\frac{1}{12}$ pos: m: $\frac{1}{12}$ quant: hoc est igitur $\frac{1}{4}$ pos: p: 10 $\frac{1}{3}$ m: $\frac{1}{12}$ quant: abijce ex 28 relinquitur, 17 $\frac{2}{3}$ p: $\frac{1}{12}$ quant: m: $\frac{1}{4}$ pos: & tantum habuit secundus. suppositum est autem habere illum quantitatem, quantitas igitur secunda, æqui ualet $\frac{1}{12}$ fuimet,

Pri: Secund: Terti:
res quan: 31 m:
Quarta parte reliq̊rũ
primus 16 $\frac{1}{2}$ p: $\frac{1}{8}$ pos:
m: $\frac{3}{8}$ quan: æqualia
positioni primæ

$\frac{7}{8}$ pos: p: $\frac{3}{8}$ quan: æq̃lia 16 $\frac{1}{2}$

Secundus 17 $\frac{2}{3}$ p: $\frac{1}{12}$
quan: m: $\frac{1}{4}$ pos: æq̃lia quantitati secundę

$\frac{11}{12}$ quan: p: $\frac{1}{4}$ pos: æqualiæ 17 $\frac{2}{3}$

met,& 17 $\frac{2}{3}$ m: $\frac{1}{4}$ pos: abiectis communiter $\frac{1}{12}$ quantitatis,& restituto m: alteri parti, fient $\frac{11}{12}$ quan: p: $\frac{1}{4}$ pos: æqualia 17 $\frac{2}{3}$, quare 11 quan: p: 3 pos: æqualia erunt 212, multiplicatis partibus omnibus per 12 denominatorem, inde duces quamuis earum ad æqualitatem alterius, in positionum aut quantitatum numero, ut pote dicendo, 3 pos: p: 11 quan: æquantur 212, uolo modo ut sint 7 positiones,& erunt per regulam quatuor quantitatum proportionalium, 25 $\frac{2}{3}$ quan: æquales 494 $\frac{2}{3}$, habes igitur, ut uides, 7 pos: p: 3 quantitatibus æqualia 132,& 7 pos: p: 25 $\frac{2}{3}$ quantitatibus æqualia 494 $\frac{2}{3}$, igitur cum 7 pos: sint idem, in utroque erit differentia quantitatum, scilicet 22 $\frac{2}{3}$, æqualis numerorum differentiæ, quæ est 362 $\frac{2}{3}$, diuide igitur, sicut in positione simplici, per capitulum tertium, 362 $\frac{2}{3}$, per 22 $\frac{2}{3}$, exit 16, æstimatio quantitatis, & tantum habuit secundus. Rursus ponamus primo esse rem, secundo iam erant 16, tertio sit secunda quantitas, cumque secundus cum tertia parte primi & tertij, habeat 28, ipse autem habeat 16, erit $\frac{1}{3}$ pos: p: $\frac{1}{3}$ quantitatis ęqualis 12, residuo 16 & 28,& ideo 1 pos: p: 1 quantitate æquabuntur 36, at uero primus, cum dimidio reliquorum habuit 32, dimidium reliquorum est 8 p: $\frac{1}{2}$ quan: igitur 1 pos: p: 8 p: $\frac{1}{2}$ quan: ęquantur 32, igitur abiecto 8, fiet 1 pos: p: $\frac{1}{2}$ quan: æqlis 24, quia igitur 1 pos: p: 1 quan: æquabatur 36, igitur differentia 24 & 36, quæ est 12, æquatur dimidio quantitatis, quare per modum capituli tertij, diuiso 12 per $\frac{1}{2}$, exit 24, æstimatio quantitatis, seu numerus aureorũ tertij, iam igitur constat secundũ habuisse 16, tertium 24, primus autem cum dimidio secundi & tertij habet 32, detracto 20 dimidio secundi & tertij, ex 32, relinquitur 12 numerus primi, habuit igitur primus aureos 12, secundus 16, tertius 24. Operatio prolixa,& clara tamẽ ac facilis, semper autem reducenda est denominatio una ad eundem numerum,& tunc differentia numerorum æqualis necessario erit differentiæ alterius denominationis, ut uidisti bis in hoc exemplo

7 pos: p: 3 qua:	ęql 132
3 pos: p: 11 quan:	ęql 212
7 pos: p: 25 $\frac{2}{3}$ quã:	æql 494 $\frac{2}{3}$

7 pos: p: 3 quan:	132
7 pos: p: 25 $\frac{2}{3}$ quan:	494 $\frac{2}{3}$
22 $\frac{2}{3}$ quan: æquales	362 $\frac{2}{3}$

p[s]	2[s]	3[s]
1 pos:	16	1 quan:
$\frac{1}{3}$ pos: p: $\frac{1}{3}$ quan:		12
1 pos: p: $\frac{1}{2}$ quan:		24
1 pos: p: 1 quan:		36
$\frac{1}{2}$ quan: æqualis		12

Exemplum aliud. Dixit primus secundo, da mihi tertiam partem tuorum,& 3 p: & habebo triplum residui tui. At secundus primo, da dimidium,& 2 p: tuorum,& quod tibi relinquetur, erit nona pars omniũ quæ ego habebo. Dabimus primo rem, secundo quantitatẽ, quia

 igitur

igitur dando $\frac{1}{3}$ & 3 p: secundi, primo, relinquitur secundo $\frac{2}{3}$ quan: m: 3, & hoc est tertia pars aggregati primi quod est 1 positio p: $\frac{1}{3}$ quantitatis p: 3, igitur triplato $\frac{2}{3}$ quan: m: 3, & fit 2 quan: m: 9, erit hoc æquale pos. p: $\frac{1}{3}$ quan^{tis} p: 3, quare reddendo quod est minus, alteri parti, fiet 1 positio p: 12, æqualis 1 $\frac{2}{3}$ quan^{ti}. Rursus quia dictũ est, quòd si primus det dimidium p: 2, secundo, erit residuum scilicet $\frac{1}{2}$ pos. m: 2, nona pars aggregati, quod est 1 quan: p: $\frac{1}{2}$ pos. p: 2, igitur multiplicando tale residuum per 9, fiet 4 $\frac{1}{2}$ pos. m: 18, æquales 1 quan: p: $\frac{1}{2}$ pos$^{b'}$ p: 2, reddendo minus alteri parti, & auferendo similia, habebimus 4 pos. æquales 1 quan^{ti} p: 20, habebas etiam 1 pos. p: 12 æqualem 1 $\frac{2}{3}$ quan^{ti}, reducito partes ad ęqualitatẽ unius denominationis, & primo multiplicando 1 pos. p: 12, ęq̃lem 1 $\frac{2}{3}$ quan: per 4, fient 4 pos. p: 48 ęquales 6 $\frac{2}{3}$, quan$^{b'}$, & hoc comparabis, ut uides in figura, cum 4 pos$^{b'}$ æqualibus 1 quan^{ti} p: 20.

Primus	Secundus
1 pos.	1 quan:
1 pos. p: $\frac{1}{3}$ quã. p: 3 triplum $\frac{2}{3}$ quan. m: 3.	
1 pos: p: 12 ęq̃ 1 $\frac{2}{3}$ quã:	
1 quã: p: $\frac{1}{2}$ pos. p: 2 nonuplum $\frac{1}{2}$ pos. m: 2	
1 quã: p: 20 ęq̃l. 4 pos.	

& similiter eadem ratione reducendo numerum quantitatũ ad æqualitatẽ, habebis 5 quan^{tes} æquales 36 p: 3 positionibus, & 5 quantitates p: 100, æq̃les 20 pos$^{b'}$, in utroq; casu transferes uicissim, per regulam, si æqualibus ęqualia addas, tota quoq; fient æqualia, & habebis 4 pos^{es} p: 68 p: 1 quan^{te} æq̃les 4 pos$^{b'}$ p: 6 $\frac{2}{3}$ quan$^{b'}$ inde abiectis similibus, relinquentur 5 $\frac{2}{3}$ quan: æquales 68, igitur diuiso 68, per 5 $\frac{2}{3}$, exit 12 ęstimatio quantitatis, & id quod habuit secundus. Eadem ratione, transferes in secunda æquatione, partes dissimiles, dicendo, si 1 quan: æquantur 36 p: 3 pos$^{b'}$, & 5 quan: p: 100, æquantur 20 pos$^{b'}$, igitur 5 quan^{tes} p: 20 pos$^{b'}$, æquantur 5 quan$^{b'}$ p: 3 pos$^{b'}$ p: 136, inde abiectis similibus relinquuntur 17 pos^{es} æquales 136, quare diuiso 136 per 17 exibit 8, positionis æstimatio, seu numerus primi, habuit itaq; primus 8, secundus 12, & quamuis aliter hęc etiã solui possint, hoc tamen proprium est magis & purum, ut uno eodem'q; impetu tota quæstio absoluatur, & si etiam primum exemplum per solum rem ostendi queat.

4 pos. p: 48 æq̃les 6 $\frac{2}{3}$ quan:
4 pos. æq̃les 20 p: 1 quan:

4 pos. p: 68 p: 1 quan: æq̃les
4 pos. p: 6 $\frac{2}{3}$ quan:

5 $\frac{2}{3}$ quan: æqualis 68

5 quan: æqual. 36 p: 3 pos.
5 quan: p: 100 ęqual. 20 pos.

5 quan: p: 20 pos. æqual.
5 quan: p: 3 pos. p: 136

17 pos. æquales 136

De

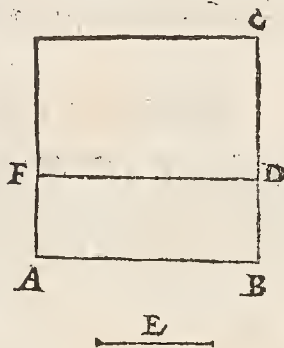
De secunda quantitate incognita multiplicata. Cap. X.



Vm uero duæ quantitates incognitæ multiplicantur, aut in se ducantur, quatuor fient modi, quorum maior pars tria habet membra.

Demonstratio.

Primus est, cum quadratum unius, & quantitates ipsæ comparantur. Sit igitur primo quadratum A C, cuius latus A B, ęquale duplo A B & quintuplo E, gratia exempli, igitur posita B D æquali numero rerum, scilicet 2, erit A D æquale duplo A B, igit̃ C F æquatur quintuplo E, quare ex 15ª sexti elementorum, A B ad E, ut 5 ad C D, est autem A B positio, & C D positio m: 2, & 5 numerus cognitus, quare regula est.

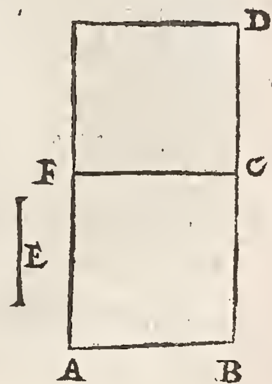


Regula.

Posita re quantalibet, duc eam in se, detracto numero rerum, & quod exit, diuide per numerũ ignotæ quantitatis, exibit æstimatio ignotę quantitatis. Exemplum, ponatur res 7, ducatur in 2 m: se, quia positum fuit, ut æquaretur duabus rebus, & quinq; quantitatibus, fiet 35, diuide 35, per 5 numerũ quantitatum, exit quan: etiam 7, & si ponatur res 10, ducemus eam in 2 m: id est in 8, & fiet 80, unde diuiso 80 per 5, exit 16, quantitas 2ª. Quod si quantitas 2ª ponatur cognita, multiplicabimus eam per suum numerum, & producto addemus quadratum dimidij ipsius numeri rerum, & radix totius, addito dimidio numeri rerum, est æstimatio rei. Exemplum, sit 2ª quantitas 16, ducemus in 5 fit 80, adde 1, quadratum dimidij numeri rerum, fit 81, huius R̨ est 9, cui addito dimidio numeri rerum fit 10, quantitas ipsius rei.

Demonstratio.

Rursus, sit decuplum A B, æquale quadrato A B & septuplo E, gratia exempli, & sit quadratum A B superficies A C & B D sit 10, igitur septuplũ E æquale est F D superficei, & ut in pręcedenti, A B ad E, sic 7 ad C D, quare regula est, cum res æquantur quadrato rei & quantitatibus.



Regula.

Positam rem quantamcunq; libuerit, minuemus ex numero rerum, & ducemus eam in residuum, productum diuidemus cum numero quantitatum, quod exit est quantita

tis æstimatio. Exemplum, ponatur hoc in casu res 8, minue ex 10 numero rerum, relinquuntur 2, quos duc in 8, fit 16, diuide per 7 numerum quantitatũ, exit $2\frac{2}{7}$ æstimatio quantitatis, quod si secunda quantitas cognita sit, ducemus eam in numerum suũ, & quod producitur, à quadrato dimidij numeri rerum minuemus, & radix residui, addita uel detracta, à numeri rerum dimidio, ostendit æstimationem rei. Exemplum, ponatur quantitas secunda $2\frac{2}{7}$, ducatur in 7 numerum quantitatum, fit 16, abijce hunc numerum ex 25, quadrato dimidij 10 numeri rerum, & relinquitur 9, cuius radix addita uel detracta à 5, dimidio 10 numeri rerum, ostendit 8 uel 2, æstimationes ipsius rei.

DEMONSTRATIO.

3 Sit etiam E numerus, æqualis quadrato A B, quod est A C, & numero A B qui est superficies F D, posita igitur A B prima, numero E secũda, E tertia, B D quarta, erit proportio A B ad E, ut numeri E ad B D, quare regula erit, cum quantitates æquantur rebus & quadrato rerum.

REGULA.

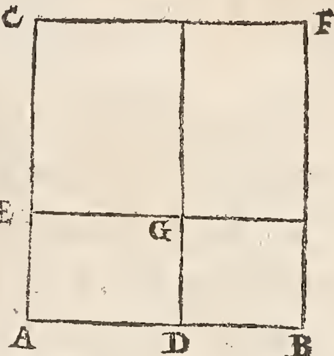
Posita rem quantamcunque libuerit, ducemus in aggregatum ex ipsa & suo numero, & productum diuidemus per numerum quantitatum, & quod exit est æstimatio quantitatis. Exemplum, 5 quantitates æquãtur 7 rebus, & quadrato rei, & res est 3, dicemus igitur, duc 3 in 10, aggregatum 3 æstimationis rei & 7 numeri rerum, fit 30, diuide per 5, numerum quantitatum, exit 6, æstimatio quantitatis. Quòd si quantitas secunda sit cognita, ducemus eam in suum numerum, & producto addemus quadratum dimidij numeri rerum, & radix totius, detracto dimidio numeri rerum, est æstimatio rei. Exemplum, ponatur 6, quantitatis æstimatio, quando 5 quantitates æquales sunt 7 rebus, & quadrato rei, duc igitur 6 æstimationem quantitatum in 5, numerũ quantitatum, fit 30, adde his quadratum $3\frac{1}{2}$ dimidij 7 numeri rerũ, scilicet $42\frac{1}{4}$, ab huius radice, quæ est $6\frac{1}{2}$, si auferas $3\frac{1}{2}$, dimidium numeri rerum, relinquetur 3 æstimatio rei.

Not^m. Solemus autem his uti positionibus, cum duorum numerorum, qui ab initio ponuntur, nulla exprimitur comparatio, nec in aggregato, nec in differentia, nec in multiplicatione, nec in diuisione, seu proportione, nec in radice, his enim quinque modis comparantur numeri, quare si unus consistat, nulla est secundæ quantitatis utilitas, sed una positione quæstio soluitur.

DEMONSTRATIO.

4 Quod si productum, ex re in quantitatem, quantitatibus & rebus comparetur, consurgent duo modi tantum, aut enim tale productũ, quan-

quantitatibus & rebus æquabitur, aut res æquabuntur producto & quantitatibus, sit & res A B, quantitas A C, numerus quantitatum A D, numerus rerum A E, erunt igitur ex supposito, duæ superficies D C, & B E, æquales A F, est autem A F ęqualis quatuor superficiebus, G A, G B, G C, G F, igitur hæ quatuor superficies, æquales sunt superficiebus D C & B E, detractis itaq; æqualiter tribus supficiebus G A, G B, G C, relinquetur altera G A, æqualis G F, quare ex 15ª sexti elementorum, A D ad D B, ut C E ut E A, proportio igitur numeri quantitatum, ad residuum ex re, ut residui quantitatis, ablato numero rerum, ad numerum rerum, secundum hoc erit regula.



REGVLA.

Si nota fuerit res, abijciemus ex ea numerum quantitatũ, & cum residuo diuidemus productum, ex numero rerum in numerum quantitatum, quod exit, est addendum numero rerum, & totum est quantitas. Exemplum, sint 10 res & 12 quantitates, æquales producto rei in quantitatem, & sit quantitas 18, tunc abijcies econtra, 10 numerum rerum, ex 18 quantitate, & relinquitur 8, cum quo diuide 120, productum ex 10 rerum numero, in 12 quantitatum numerum, & exit 15, quem adde, ad 12 numerum quantitatum, fit 27, rei æstimatio, unde 10 res, sunt 270, & 12 quantitates sunt 216, quæ iuncta faciunt 486, productum 18 quantitatis in 27 rem, & ita posuimus exemplum, regulę conuersum, ut intelligas unam & eandem esse rationem. Quod si productum ipsum cognitum sit, diuide ipsum productum per numerum quantitatum, si sit minor numero rerum, aut per numerum rerũ, si ille sit minor numero quantitatum, & dimidium exeuntis, duc in se, à quo abijce illud, quod prouenit, diuiso producto ex numero maiore in productum quantitatis, in rem, per numerum minorem, seu numerus rerum sit maior, seu minor, & ℞ residui, addita uel detracta, ab eo quod in se duxeras, ostendit æstimationem quantitatis, aut rei scilicet, quę minore numero descibitur, inde diuiso per eam producto, exit illa, quæ est maiore numero definita. Exemplum 2 res & 6 quantitates, ęquales sunt quantitati rei, quæ est, gratia exempli 64, diuido 64 per 2, minorē quàm 6, exit 32, cuius dimidiũ 16, in se duco, & fit 256, abijcio ex hoc, 192, qui prouenit, diuiso

res	quan:	productũ
2	6	64
	32	
	16 —	256
	6 — 64	192
	384	64
	2	8
	192	

384 producto 6, in 64, per 2, relinquuntur 64, cuius radix est 8, quæ addita uel detracta à 16 numero, quem in se duxisti, ostendit rei æstimationem 8, uel 24, quare si res ualet 8, quantitas etiam erit 8, diuiso enim 64 per 8, exit 8, & si res ualet 24, quantitas est $2\frac{2}{3}$, diuiso 64 per 24, & in utroque casu, 2 res & 6 quãtitates, æquantur 64 quantitati rei.

DEMONSTRATIO.

5 Quod si latus unum, æquatur producto unius in alterum, & reliquo lateri, sit latus illud A B, & reliquum A E, numerus uero lateris A B est A C superficies, igitur E F, fit ex supposito, ex A E in suum numerũ, eadem autem fit ex A B in E C, proportio igitur A B ad A E, ut numeri A E ad E C, est aũt E C residuum A E quantitatis, & A C numeri rerum, quare regula erit.

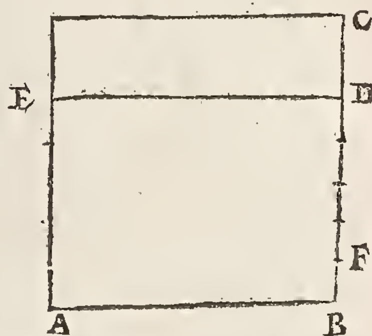
REGULA.

Cum fuerint res æquales quantitati rei, & quantitatibus, & nota fuerit quantitas, minuemus eam ex numero rerum, deinde ducemus quantitatem in suum numerum, & productum diuidemus per tale residuum, quod exit, est æstimatio rei. Exemplũ, 10 res, æquantur quantitati rei, & quatuor quantitatibus, & quantitas ipsa est 8, aufero 8 ex 10, relinquitur 2, duco etiam 8 quantitatem, in 4 numerum ipsius, fit 32, quem diuido per 2, residuum relictum, exit 16, æstimatio rei, & ubi prima detractio nequiret fieri, casus non potest in ueris numeris esse. Si uero nõ quantitas, sed ipsa res, sit cognita, quia ex A B, in A C, fit, quantũ ex A E in aggregatum ex A B et numero A E, diuidemus productum ex numero rerum in æstimationem rei, per aggregatum ex re & numero quantitatum, quod exit, est quantitatis æstimatio. Exemplum, 10 res æquantur quantitati rei, & 4 quantitatibus, & res est 16, duco 16 rem in 10 numerum rerum, fit 160, diuido per 20 aggregatum ex 4 numero quantitatum & 16 rei æstimatione, exit 8, æstimatio quantitatis, si uero quantitas rei cognita esset, duces talem quantitatem rei, in numerum quantitatum, & productum diuides per numerum rerum, cui exeunti, adde quadratũ dimidij eius, quod exit, diuisa quantitate rei per numerum rerum, & radix aggregati, addito dimidio, quod prius in se duxeras, est rei æstimatio. Exemplum, sint 4 res æquales 5 quantitatibus, & quantitati rei, quę sit 45, ducam 45, per 5 numerum quantitatum, fit 225, diuido per 4 numerum rerum, exit $56\frac{1}{4}$, cui addo $31\frac{41}{64}$ quadratum $5\frac{5}{8}$, dimidij prouentus 45 diuisi per 4, & fit totum $87\frac{57}{64}$, cuius radici quæ est $9\frac{3}{8}$, si addantur $5\frac{5}{8}$ dimidium prouentus diuisionis, fiet 15 res.

DEMONSTRATIO.

6 Cum uero quadratum rei, & quantitas rei, & res, inuicem comparantur,

rantur, fiunt modi tres, primus est, cum quadratũ rei, ęquale est quantitatibus rerum & rebus, & sit A B res, cuius quadratum A C, & sit B F quantitas, & A D quantitates rerum, & erit, ut quoties B F in B D continetur, totus sit numerus quantitatis rei, D C igitur erit rerum numerus, quia igitur B C æqualis est A B, & C D est numerus rerum, erit ut detracto numero rerum ex re, relinquatur B D, productum ex numero quantitatis rei, in quantitatem. unde regula.

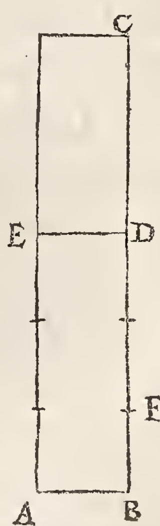


Regula.

Cum quadratum rei æquatur rebus, & quantitatibus rerum, si res est cognita, auferemus ex ea numerum rerum, residuum diuidemus per numerum quantitatis rei, & prodibit quantitas. Exemplum, 10 res cum 4 quantitatibus rerum, æquantur quadrato rei, & res est 30, aufero 10 ex 30, relinquitur 20, quem diuido per 4, numerum quantitatis rei, & exit 5, æstimatio quantitatis. Quòd si quantitas nota sit, ducemus eam in numerum quantitatis rei, & producto addemus numerum rerum, & conflabitur rei æstimatio. Exemplũ, 10 res & 4 quantitates rei, ęquantur quadrato rei, & quantitas est 7, ducemus 7 in 4 numerum quantitatis, & fiet 28, cui addemus 10 numerum rerum, fiet æstimatio rei 38. Si uero productum ex re in quantitatem cognitum fuerit, ducemus ipsum in numerum quantitatum rerum, & ei addemus quadratum dimidij numeri rerum, & radix totius cum dimidio numeri rerum superaddito, est æstimatio rei. Exemplũ, q̃dratũ rei ęquatur 10 rebus, & quatuor quantitatibus rerum, & quantitas rei est 50, ducemus 50 in 4 numerum suum, id est quantitatum rerũ, & fit 200, cui addemus 25, q̃dratum dimidij 10 numeri rerum, fit 225, cuius radici addo 5, dimidium numeri rerum, & fit 20, rei æstimatio, unde diuiso 50 producto rei, in quantitatem exit $2\frac{1}{2}$, æstimatio quantitatis.

Demonstratio.

Quod si quantitas rei, æqualis sit quadratis rei & numero rerum, ponemus rem A B, & quantitatem B C, & quantitas rei A C, ea causa necessario erit & D C numerus rerum, & A D erit aggregatum quadratorum, igitur detracta D C ex B C, relinquetur B D, qua diuisa per numerum quadratorum, prodibit B F æqualis A B. regula igitur est.



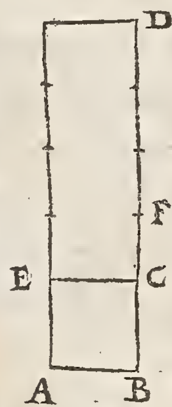
Regula.

Cum fuerit quantitas rei, æqualis quadratis rei & nu-

mero rerum,& fuerit nota res,ducemus eam in numerum quadratorum,& producto addemus numerum rerum, & conflabitur quantitas. Exemplum, quantitas rei æquatur 6 quadratis rei,& 10 rebus, & res est 4, duc 4 in 6 numerum quadratorum, fit 24, adde ei 10, numerum rerum, fit 34, æstimatio quantitatis. Quod si quantitas cognita sit, auferemus ex ea numerum rerum,& residuum diuidemus per numerum quadratorum rerum, quod exit, est æstimatio rei. Exemplum, quantitas rei æquatur 6 quadratis rei,& 10 rebus, & quantitas ipsa est 34, aufero 10 de 34, relinquitur 24, quem diuido per 6, numerum quadratorum, exit 4, ęstimatio rei. Si uero quantitas rei cognita sit, diuidemus eam per numerum quadratorum, & prodeunti addemus quadratum dimidij eius, quod exit diuiso numero rerum per numerum quadratorum rerum,& radix totius, cum detractum fuerit idem dimidium, erit rei æstimatio. Exemplum. Quantitas rei æquatur 6 quadratis rei,& 60 rebus,& quantitas rei est 1200, diuide 1200 per 6 numerum quadratorum rei, exit 200, cui addo 25, quadratum 5, dimidij prouentus 60 numeri rerum, diuisi per 6 numerum quadratorum, fit 225, à cuius radice, quæ est 15, aufero 5 dimidium ipsius prouentus,& relinquetur 10, rei æstimatio, inde diuiso 1200, qui est quantitas rei, prodit 120 æstimatio quantitatis.

DEMONSTRATIO.

8 Quod si numerus rerum, sit æqualis quadrato rei & quantitatibus rerum (etenim ad unum quadratum, uel ad unam quantitatē rei, per cōmunem diuisionē, semper, ut in uniuersis dictū est capitulis, reducere licet) ponemus A B rem, q̄dratum eius A C, numerū rerū B D, erit igitur E D numerus quantitatis rei,& C D numerus productus ex numero quantitatū in quantitatem, quę sit C F, quia igitur C D, est residuum A B & B D, erit regula hæc.



REGVLA.

Cum fuerit numerus rerum, æqualis quantitatibus rerum,& quadrato rei,& fuerit res cognita, auferemus eam ex suo numero,& residuum diuidemus per quantitatis rei numerum, quod exit, est quantitatis æstimatio. Exemplum, 10 res, ęquantur quadrato rei,& tribus quantitatibus rei,& res est 4, auferemus 4 ex 10, relinquuntur 6, diuido per 3, numerum quantitatum rei, exit 2, æstimatio quantitatis. Si uero quantitas cognita sit, ducemus eam in numerum quantitatis rei,& productum auferemus ex numero rerum, residuum est rei æstimatio. Exemplum, 10 res æquantur quadrato rei,& producto rei in quantitatē ter, & quantitas est 2,

duce-

ducemus igitur 2 æstimationem quantitatis, in 3, numerum quantitatis rei, & producitur 6, quem aufero ex 10, numero rerum, relinquitur 4, æstimatio rei. Si uero productum ex re, in quantitatem, cognitum fuerit, ducemus illud in numerum suum, & productum auferemus à quadrato dimidij numeri rerum, & radix residui addita uel detracta, ab ipso dimidio numeri rerum, ostendit æstimationem rei. Exemplum, 10 res, æquantur quadrato rei, & 3 quantitatibus rerum, & quantitas rei est 8, ducam 8 in 3, numerum quantitatis rei, fit 24, hunc abijciemus ex 25, quadrato 5 dimidij 10, relinquitur 1, cuius R, quæ est 1, addita uel detracta ex 5, ostendit 6, uel 4, æstimationes rei, unde diuiso 8 quantitate rei, per 6, uel per 4, exit $1\frac{1}{3}$ uel 2, æstimatio quantitatis.

DEMONSTRATIO.

Quod si quadratum rei, & quantitas rei, & quantitas, inuicem 9
comparentur, consurgunt tres alij modi, sit igitur primo quadratum rei, æquale quantitatibus rerum, & numero quantitatum, & ponatur A B res ipsa, cuius quadratum A C, æquale sit quantitatibus rerū (quæ sint A D, ita ut D E, sit quantitas) & numero quantitatum D E, qui sit F H, eritq; superficies G F, æq̄lis ex supposito, superficiei C K, quare ex 15^a 6^i elementorum A B, ad D E, uelut H F, ad D C, est aūt A B res, D E quantitas, H F numerus quantitatū, C D residuum rei, & producti ex numero quantitatis rei, in ipsum quantitatem, quare regula est.

REGVLA.

Cum quadratum rei, æquale fuerit productis, ex quantitate in rem & in numerum, fueritq; res ipsa cognita, ducemus rem in numerum quantitatum rerum, & producto addemus numerum quantitatum, & cum aggregato diuidemus quadratum rei, prouentus est æstimatio quantitatis. Exemplum, quadratum rei, æquale sit sex quantitatibus rerum, & 20 quantitatibus, & ipsa res sit 12, duco 12, in 6 numerum quantitatis rei, fit 72, cui addo 20 numerum quantitatum, fit 92, cum hoc diuido 144 quadratum rei, exit $1\frac{13}{23}$, quantitas ipsa, si uero quantitas cognita sit, ducemus eam in numerum suum, & seruabimus productum, deinde ducemus eandem in numerum quantitatis rerū, huiusq; producti dimidium, in se ductum, addemus priori producto & radici, ipsius aggregati, adijciemus dimidium quod in se duxeramus,

 mus,

mus,& totum eſt æſtimatio rei. Exemplum, Quadratum rei, æquale ſit 12 quantitatibus,& 5 quantitatibus rei,& quantitas ipſa eſt 2, ducam 2 quantitatem, in 12 numerum ſuum, fit 24, deinde ducam eandem quantitatem 2, in 5 numerum quantitatis rei,& fit 10, huius dimidium quod eſt 5, duco in ſe, fit 25, addo ad 24, iam ſeruatū, fit 49, huius radici quæ eſt 7, addo idem dimidium quod eſt 5, fit 12, æſtimatio rei. Vbi autem nota eſſet quantitas rei (& eſt in figura ſuperficies E K) ducemus eam in ſuum numerum,& producti tertiam partem, ad cubum reducemus, ducemus & quantitatem rei in numerum quantitatum,& dimidium producti in ſe multiplicabimus,& ab hoc auferemus partem, quam ad cubum duxeramus, id eſt cubum ipſum, tertiæ partis, primi producti, quem ſeruaſti,& radicem huius reſidui, addemus & minuemus, à dimidio ſecundi producti,& radices cubicæ aggregati, & reſidui ſimul iunctæ, ſunt æſtimatio rei. Exemplum. Quadratum rei, æquale eſt 12 quantitatibus, & 2 quantitatibus rei, & quantitas rei eſt 24, ducam 2, in 24, fit 48; huius tertiam partem, quæ eſt 16, ducam ad cubum, fit 4096, ducam etiam 24 in 12, fit 288, cuius medietatē in ſe duco,& fit 144 medietas, & eius quadratum, 20736, ab hoc aufero 4096, relinquitur 16640, cuius radicem addo & minuo à 144, fiūt 144 p:℞ 16640 & 144 m:℞ 16640, horum radices cubicæ iunctæ, ſunt rei æſtimatio.

Quad.rei.	Quan:	Quan:rei
	12	2
Quan: rei	24	
	288	48
	144	16
	20736 — 4096	
	16640	
	144 p:℞ 16640	
	144 m:℞ 16640	

Quòd ſi ex numero, per æqualia diuidendo, ſumpta medietas, nō producat quadratum æquale, aut maius cubo tertiæ partis primi producti, operaberis per reſiduum regulæ capituli, cubi æqualis rebus & numero, nam facta multiplicatiōe per productum, ut in exemplo per 24, qui numerus eſt quantitas rei, erit cubus æqualis rebus & numero, rebus quidem productis ex quantitate rei in numerum ſuum, numero autem producto ex quantitate rei in numerum quantitatum, ut in exemplo dictum eſt, quod quadratum rei æquale fuit 2 quantitatibus rei,& 12 & quantitatibus,& quod quantitas rei eſt 24, dicemus igitur cubus æquatur 48 rebus, p: 288 numero, & 48 producitur ex 24 in 2,& 288 ex 24 in 12, ergo ponamus quod quadratum rei, æquale ſit 2 quantitatibus rei & 3 quantitatibus,& quantitas rei ſit 8, ducemus 8 in 2,& 3,& producentur 16 & 24, igitur cubus æquabitur 16

rebus

rebus p: 24, & res ualet ℞ 13 p: 1, ex capitulo suo, inde diuiso 8 quantitate rei, per ℞ 13 p: 1, exit ℞ $5\frac{7}{9}$ m: $\frac{2}{3}$, quantitas ipsa, est autem quadratum ℞ 13 p: 1, hoc 14 p: ℞ 52 & quantitas rei est ℞ $75\frac{1}{9}$ m: $\frac{2}{3}$,

Quad. rei	Quan:	Quan: rei
	3	2
	8	
	24	16

& est 8, cuius duplum est 16, & tres quantitates sunt, ℞ 52 m: 2, quæ iunctę cum 16, duplo quantitatis rei, faciunt 14 p: ℞ 52, q̄dratum rei.

Nota quòd in hac regula, semper res est media proportionalis, inter quantitatem & aggregatum ex numero quantitatum, & producto rei in numerum quantitatis rei, ut in exemplo, ℞ 13 p: 1, quæ est res, est proportionalis inter ℞ $5\frac{7}{9}$ m: $\frac{2}{3}$, quæ est quantitas, & ℞ 52 p: 5, qui constat ex 3, numero quantitatum, & producto ex ℞ 13 p: 1, re ipsa, in 2, numerum quantitatis rei. Notm 1

Nota etiam, quòd regula hæc pendet ex capitulo cubi æqualis rebus & numero, uelut sequens, ex capitulo cubi & numeri æqualium rebus, & ultima, ex capitulo cubi & rerum æqualium numero. Notm secūd.

Nota etiam, quòd res est eadē, quæ quęritur in capitulo cubi ęq̄lis rebus & numero, sed quantitas, est numerus, qui prouenit diuiso quocunq; numero, per rem ipsam, nam eidem capitulo, cubi æqualis rebus & numero, competit una sola res, sed infinitæ quantitates, uelut dictum est hic, quod res est ℞ 13 p: 1, & diuisimus 8, quantitatem rei, si autem ponatur cubus æqualis 16 rebus & 24 numero, erit res semper ℞ 13 p: 1, sed posita quantitate rei 4, erit numerus quantitatis 6, & quantitatis rei 4, & quantitas ℞ $1\frac{4}{9}$ m: $\frac{2}{3}$. Notm tertiū.

DEMONSTRATIO.

Quod si quantitas rei, æqualis sit quadratis rei, & quantitatibus, ponemus A B rem, & quantitatem B C, & numerum quadratorum, secundum quem B G, æqualis A B, continetur in B D, & erunt quadrata A D, iuncta, & E C residuum, æquale numero quantitatum, & sit numerus quantitatū F C, erit igitur F B, ęqualis E C, quare B C quantitatis, ad A B rem, ut D C residui rei, ductæ in numerum quadratorum, à quantitate ad C F numerum quantitatum, erit etiam ex hoc E B residuum, æquale A F residuo, quare A B media proportionalis inter A H & B C, diuisam secundum numerū, secundum quem B G continetur in B D. 10



Nota igitur, quod in hac tota regula, res media proportionalis est, inter quantitatem diuisam, per numerum quadratorum, & residuum rei & numeri quantitatum. Notm.

REGVLA.

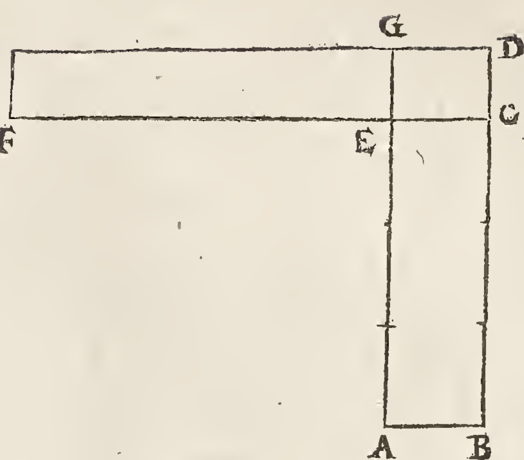
Regula igitur est, cũ quantitas rei, æqualis fuerit quadratis rei & quantitatibus, & res nota fuerit, ducemus eam in se, deinde in numerum quadratorum, & productum diuidemus, per residuum rei à numero quantitatum, & quod exit, est quantitas. Exemplum, Quan: rei æquatur tribus quadratis rei, & 12 quantitatibus, & sit res 20, gratia exempli, duco 20 in se, fit 400, duco 400 in 3 numerum quadratorum, fit 1200, diuido 1200, per 8, differentiam rei & numeri quantitatum, exit 150, quantitas ipsa. Si uero quantitas ipsa cognita sit, non res, duc eam in numerum quantitatum, & productum diuide per numerum quadratorum, quod exit, abijce ex quadrato dimidij prouentus quantitatis diuisæ per numerum quadratorum, & radix residui, addita uel detracta, à dimidio eiusdem prouentus, ostendit æstimationem rei. Exemplum, Quantitas rei, æqualis est 4 quadratis rei, & 3 quantitatibus, & quantitas ipsa est 50, duc 50 in 3 numerum quantitatum, fit 150, diuide 150, per 4 numerum quadratorum, exit $37\frac{1}{2}$, deinde diuide 50, per 4, scilicet quantitatem per numerum quadratorum, exit $12\frac{1}{2}$, huius dimidium, quod est $6\frac{1}{4}$, duc in se, fit $39\frac{1}{16}$, à quo abijce $37\frac{1}{2}$, relinquuntur $1\frac{9}{16}$, cuius radix est $1\frac{1}{4}$, quæ addita uel detracta à $6\frac{1}{4}$, ostendit æstimationes rei, $7\frac{1}{2}$, uel 5. Si autem productum seu quantitas rei cognita sit, ducemus quantitatẽ rei in numerũ quantitatum, & productum diuidemus per numerum quadratorum, exiẽs est numerus, qui cũ cubo ęquatur tot rebus, quotus est numerus qui prouenit diuisa quantitate rei per numerum quadratorum. Exemplum, Quantitas rei, quæ sit 1500, æqualis est 4 quadratis rei, & 6 quantitatibus, ducemus igitur 6 in 1500, fit 9000, diuide per 4 numerum quadratorum, exit 2250, numerus, qui cum cubo æquatur 375 rebus, est autem 375 numerus, qui prouenit, diuiso 1500 numero quantitatis rei, per 4 numerum quadratorum, per capitulum autem suum, res ualet 10, uel R 300 m: 5, & uterque istorum numerorum, potest esse rei æstimatio, in casu isto, quando quant^as rei, quæ est 1500, æquatur 4 quadratis rei, & 6 quantitatibus, & æstimatio quantitatis habetur, diuiso 1500 qui est æstimatio quantitatis rei, per alteram æstimationem rei.

Quan: rei	Quad. rei	Quan:
1500	4	6
	375	1500
	2250	1000

DEMONSTRATIO.

11 Cum uero quantitates C D, in numero C F, æquales fuerint quadratis A B rei, & quantitati rei D E, reducendo ad unam quantitatẽ rei, erit

erit detracta communi ſuperficie D E, ſuperficies G F æqualis A C, quare quadratum A B, per primam ſexti elementorum, æquale ſuperficiei, ex E G in partem E F talem, qualis A B, eſt pars B C, igitur ex 16ª 6ª elementorum, A B media eſt inter D C & partem illam ex E F, unde regula.



Regula.

Cum fuerint quantitates, æquales quantitati rei, & quadratis rerum, & fuerit nota res, ducemus eam in ſe, deinde productum in numerum quadratorum, & diuidemus, quod producitur ultimo, per numerum quantitatum, detracta re, & exibit quantitas. Exemplum, 12 quantitates, æquantur quantitati rei, & tribus quadratis rei, & res eſt 4, ducam 4 in ſe, fit 16, ducam 16 in 3, numerum quadratorum rei, fit 48, diuidam 48, per 12 numerum quantitatum, detracto 4 re, & eſt diuidere per 8, exit 6, quantitas ipſa. Si uero quantitas cognita ſit, duc eam in numerum ſuum, & productum diuide per numerum quadratorum rei, ei prouentui adde quadratum dimidij eius, quod prouenit, diuiſa quantitate per numerum quadratorum, & radix totius, detracto eodem dimidio, eſt æſtimatio rei. Exemplum, 12 quant^{ta} æquantur quan^{ti} rei, & 3 quadratis rei, & quantitas eſt 6, duco 12 in 6, fit 72, diuido per 3 numerum q̃dratorum, fit 24, deinde diuido 6 quantitatẽ, per 3 numerum q̃dratorum, exit 2, cuius dimidium quod eſt 1, duco in ſe fit etiam 1, addo ad 24, fit 25, cuius R 5, detracto 1, dimidio 2, relinquit 4, æſtimationem rei. Si uero quant^{as} rei nota ſit, ducemus eam in numerum quantitatum, & productum diuidemus per numerum quadratorum, & quod exit, eſt numerus qui æquatur cubo & rebus, quarum numerus eſt id, quod prouenit diuiſa quantitate rei, per numerum quadratorum, inde ęquatio rei, eſt æſtimatio quæſita, unde diuiſa quan^{te} rei, per æſtimationẽ rei, exibit æquatio quantitatis.

Quad. rei		Quan: rei		Quan:
3	—	24	—	12
	8		288	
	96			

Exemplum, 12 res, æquales ſunt quan^{ti} rei, & 3 quad. rei, & quant^{as} rei, eſt 24, duco 24 in 12, fit 288, diuido per 3, exit 96, deinde diuido 24 per idem 3, numerum quad. rei, exit 8, igitur cubus p: 8 rebus, æquatur 96, tunc uero per capitulum ſuum, res ualet 4. Ideo 4 eſt rei æſti-

æstimatio, cum quo diuide 24 quantitatem rei, exit 6 quantitas ipsa.

Not^{m}. Scias, quòd quodlibet capitulum, seu regula ex præcedentibus, habet omnes proprietates contentas in eadem regula, in singulis modis, quamuis modo utamur una, modo alia, secundum quòd illud quod est notum, aliud fit. Exemplum, in decima regula sunt quinque proprietates. PRIMA, quòd proportio quantitatis ad rem, est ut ducta re in numerum quadratorum, & detracta quantitate, ad numerũ quantitatum. SECVNDA, quòd res est proportionalis, inter quantitatem diuisam per numerum quadratorum, & differentiam rei à numero quantitatum. TERTIA, quòd ducta re in se, & post in numerum quadratorum, ducto quadrato, tantum fit, quantum ex quantitate in residuum rei & numeri quantitatum. QVARTA & QVINTA, sunt reliqui duo modi procedendi illius regulæ, ad inuentionem rei, horum exempla in quæstionibus subiungere libuit.

QVÆSTIO I.

Inuenias duos numeros, quorum quadrata iuncta, sint 100, & productum unius in alterum duplum sit aggregato eorũ. Ponemus primum rem, secundum quantitatem, igitur quantitas rei, æqualis est 2 rebus, & 2 quantitatibus, quare ex 4^{a} regula, proportio residui rei, ad 2, ut 2 ad residuum quantitatis, igitur erunt tres quantitates proportionales, residuum rei, 2, & residuum quantitatis, res autem constat ex suo residuo & 2, sed quantitas ex suo residuo & 2, igitur res est aggregatũ primæ & secundæ trium quantitatũ proportionalium, & quantitas aggregatum secundæ & tertiæ, igitur ex dictis in capitulo trium quantitatum proportionalium, quadratum aggregati primæ & secundæ cum quadrato aggregati secundæ & tertiæ, & cum quadrato secundæ, æquantur quadrato aggregati ipsarum trium quantitatum, at uero quadratum aggregati primæ & secundæ & quadratum aggregati secundæ & tertiæ ex supposito faciunt 100, & quadratum secundæ est 4, quia 2^{a} quantitas proportionalis fuit 2, igitur quadratum aggregati omnium trium quantitatum est 104, igitur tres quantitates ipsæ iunctæ, sunt R 104, & quia 2ª est 2, erunt reliquæ, scilicet prima & tertia, R 104 m: 2, fac igitur ex R 104 m: 2, duas partes, producentes 4, quadratum 2, & erunt R 26 m: 1 p: R v: 23 m: R 104, & R 26 m: 1 m: R v: 23, m: R 104, & quia res cõstat ex prima & secunda proportionali, & quãtitas ex 3^{a} & 2ª ꝓportionali, erit igitur ut addamus 2 utrique parti, scilicet secundam quantitatẽ, & fiet res R 26 p. 1 p: R v: 23 m: R 104, & quãtitas R 26 p: 1 m: R v: 23 m: R 104, horũ q̃drata iuncta sunt 100, præcise, & productum unius in alterum est R 416

p: 4,

p:4, duplum aggregati eorũ, uia uero communi procedẽdo, peruenires ad partes has, quas uides infra, liquet autem quòd illæ confusæ magis sunt, quamuis superioribus æquiualeant.

℞ 26 p: 1 p: ℞ v: 23 m: ℞ 104
℞ 26 p: 1 m: ℞ v: 23 m: ℞ 104
℞ v^{ma} 50 p: ℞ v: 2068 m: ℞ 26624
℞ v^{ma} 50 m: ℞ v: 2068 m: ℞ 26624

QVÆSTIO II.

Inuenias duos numeros, quorum q̃drata iuncta sint 100, & quadratum maioris, æquale sit ductui maioris in minorem quater cum octuplo maioris. Ponemus maiorem rem, minorem quantitatẽ, eritq́ quadratum rei, æquale 4 quantitatibus rei & 8 rebus, quare ex 6^{a} regula, auferemus 8 ex re, & fiet residuum res m: 8, unde diuisum per 4 exibit $\frac{1}{4}$ rei m: 2, & hæc est quantitas quadrata, igitur rei & $\frac{1}{4}$ rei m: 2 æqualia sunt 100, quare 1 $\frac{1}{16}$ quad. p: 4 m: 1 re, æq̃bitur 100, & quadratum æquabitur $\frac{16}{17}$ rei, & 90 $\frac{6}{17}$, quare res est ℞ 90 $\frac{166}{289}$ p: $\frac{8}{17}$, & quantitas est $\frac{1}{4}$ huius m: 2, scilicet ℞ 5 $\frac{191}{289}$ m: 1 $\frac{15}{17}$.

QVÆSTIO III.

Inuenias duos numeros, quorum q̃drata iuncta sint 100, & productum unius in alterum, æquale sit triplo quadrati minoris, & sexcuplo eiusdem minoris. Ponemus rem minorem numerum, & quantitatem maiorem, igitur quantitas rei, æquatur 3 q̃dratis rei & 6 rebus, quare ex 7^{a} regula, quantitas est 3 res p: 6 quadrata, igitur rei & triũ rerum p: 6 iuncta sunt 100, igitur 10 quadrata p: 36 rebus p: 36, æquantur 100, & 1 q̃d. p: 3 $\frac{3}{5}$ rei, æquatur 6 $\frac{2}{5}$, res igitur est, ℞ 9 $\frac{16}{25}$ m: 1 $\frac{4}{5}$, & quantitas triplum huius p: 6, id est ℞ 86 $\frac{19}{25}$ p: $\frac{3}{5}$.

QVÆSTIO IIII.

Fac de 20, tres partes proportionales, quarum mediæ quadratũ, ęquale sit duplo producti mediæ in minorem, & quadruplo minoris, posita media re, & minore quantitate, erit quadratum rei, æquale 2 quantitatibus rei, & 4 quantitatibus. Quare ex notando primo nonę regulæ, res media est proportionalis, inter quantitatem & aggregatum ex numero quantitatum 4, ac producto rei in numerum quantitatis rei, scilicet 2, tertia igitur quantitas est 2 res p: 4, quia igit̃ 3^{a} quantitas est 2 res p: 4, & 2^{a} res, & hæc cum prima constituunt 10, erit prima 6 m: 3 rebus, quare ducta prima in tertiam, fiet quadratum secundæ, igitur 1 q̃dratum æq̃tur 24 m: 6 q̃dratis, quare 7 q̃drata ęquantur 24, & res est ℞ 3 $\frac{3}{7}$, & hæc est media, cuius duplum p: 4 est tertia, uidelicet 4 p: ℞ 13 $\frac{5}{7}$, inde detracto aggregato secundę & tertiæ ex 10

2 res p: 4	res	6 m: 3 reb⁹
4 p: ℞ 13 $\frac{5}{7}$	℞ 3 $\frac{3}{7}$	6 m: ℞ 30 $\frac{6}{7}$

relinquitur prima 6 m: ℞ 30$\frac{6}{7}$, hæ autem quantitates proportionales sunt, & quadratum secundæ est æquale duplo producti secundæ in primam, cum quadruplo primæ, ut proponebatur.

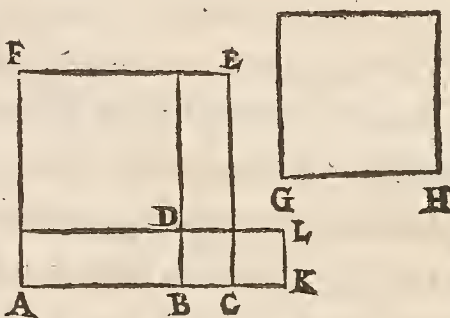
De cubo & rebus æqualibus numero. Cap. XI.



Cipio Ferreus Bononiensis iam annis ab hinc triginta ferme capitulum hoc inuenit, tradidit uero Anthonio Mariæ Florido Veneto, qui cũ in certamen cũ Nicolao Tartalea Brixellense aliquando uenisset, occasionem dedit, ut Nicolaus inuenerit & ipse, qui cum nobis rogantibus tradidisset, suppressa demonstratione, freti hoc auxilio, demonstrationem quæsiuimus, eamq́ꝫ in modos, quod difficillimum fuit, redactam sic subiecimus.

DEMONSTRATIO.

Sit igitur exempli causa cubus G H & sexcuplum lateris G H æquale 20, & ponam duos cubos A E & C L, quorum differentia sit 20, ita quod productum A C lateris, in C K latus, sit 2, tertia scilicet numeri rerum pars, & abscindam C B, æqualem C K, dico, quod si ita fuerit, lineam A B residuum, esse æqualem G H, & ideo rei æstimationem, nam de G H iam supponebatur, quod ita esset, perficiam igitur per modum primi suppositi 6ⁱ capituli huius libri, corpora D A, D C, D E D F, ut per D C intelligamus cubum B C, per D F cubum A E, per D A triplum C B in quadratum A B, per D E triplum A B in quadratũ B C. quia igitur ex A C in C K fit 2, ex A C in C K ter, fiet 6 numerus rerum, igitur ex A B in triplum A C in C K fiunt 6 res A B, seu sexcuplum A B, quare triplum producti ex A B, B C, A C, est sexcuplum A B, at uero differentia cubi A C, à cubo C K, & existenti à cubo B C ei æq̃le ex supposito, est 20, & ex supposito primo 6ⁱ capituli, est aggregatum corporum D A, D E, D F, tria igitur hæc corpora sunt 20, posita uero B C m: cubus A B, æqualis est cubo A C, & triplo A C in quadratum C B, & cubo B C m: & triplo B C in quadratum A C m: per demonstrata illic, differentia autem tripli B C in quadratum A C, à triplo A C in quadratum B C est productum A B, B C, A C, quare cum hoc, ut demonstratum est, æquale sit sexcuplo A B, igitur addito sexcuplo A B, ad id quod fit ex A C in quadratum B C ter, fiet triplum B C in quadratum A C, cum igitur B C sit m: iam ostensum est, quod productum C B



in

in quadratum a c ter, eſt m: & reliquum quod ei æquatur eſt p: igitur triplum c b in q̄dratum a b, & triplum a c in q̄dratū c b, & ſexcuplū a b nihil faciunt. Tanta igitur eſt differentia, ex cōmuni animi ſententia, ipſius cubi a c, à cubo b c, quantum eſt quod cōflatur ex cubo a c, & triplo a c in quadratum c b, & triplo c b in quadratum a c m: & cubo b c m: & ſexcuplo a b, hoc igitur eſt 20, quia differentia cubi a c, à cubo c b, fuit 20, quare per ſecundum ſuppoſitum 6^i capituli, poſita b c m: cubus a b æquabitur cubo a c, & triplo a c in quadratum b c, & cubo b c m: & triplo b c in quadratum a c m: cubus igitur a b, cum ſexcuplo a b, per communem animi ſententiam, cum æquetur cubo a c & triplo a c in quadratum c b, & triplo c b in quadratum a b m: & cubo c b m: & ſexcuplo a b, quæ iam æquatur 20, ut probatum eſt, æquabuntur etiam 20, cum igitur cubus a b & ſexcuplum a b æquentur 20, & cubus g h, cum ſexcuplo g h æquentur 20, erit ex communi animi ſententia, & ex dictis, in 35^a p^i & 31^a undecimi elementorum, g h æqualis a b, igitur g h eſt differentia a c & c b, ſunt autem a c & c b, uel a c & c k, numeri ſeu liniæ continentes ſuperficiem, æqualem tertiæ parti numeri rerum, quarum cubi differunt in numero æquationis, quare habebimus regulam.

Regvla.

Deducito tertiam partem numeri rerum ad cubum, cui addes quadratum dimidij numeri æquationis, & totius accipe radicem, ſcilicet quadratam, quam ſeminabis, uniꝗ dimidium numeri quod iam in ſe duxeras, adijcies, ab altera dimidium idem minues, habebisꝗ Binomium cum ſua Apotome, inde detracta ℞ cubica Apotomæ ex ℞ cubica ſui Binomij, residuū quod ex hoc relinquitur, eſt rei æſtimatio.

Exemplum. cubus & 6 poſitiones, æquantur 20, ducito 2, tertiam partem 6, ad cubum, fit 8, duc 10 dimidium numeri in ſe, fit 100, iunge 100 & 8, fit 108, accipe radicem quæ eſt ℞ 108, & eam geminabis, alteri addes 10, dimidium numeri, ab altero minues tantundem, habebis Binomiū ℞ 108 p: 10, & Apotomen ℞ 108 m: 10, horum accipe $℞^{es}$ cub^{as} & minue illam quę eſt Apotomæ, ab ea quæ eſt Binomij, habebis rei æſtimationem, ℞ V: cub: ℞ 108 p: 10 m: ℞ V: cubica ℞ 108 m: 10.

cub⁹ p: 6 reb⁹ æq̄lis 20
2 — 20
8 ——— 10
108
℞ 108 p: 10
℞ 108 m: 10
℞ V: cu. ℞ 108 p: 10
m: ℞ V: cu. ℞ 108 m: 10

Aliud, cubus p: 3 rebus æquetur 10, duc 1, tertiam partem 3, ad cubum, fit 1, duc 5, dimidium 10, ad quadratum, fit 25, iunge 25 & 1,

fiunt 26, huius radici adde 5, & ab ea minue 5, habebis Binomium R 26 p: 5, & Apotomen R 26 m: 5, igitur rei æstimatio est R v: cubica R 26 p: 5 m: R v: cubica R 26 m: 5, experientia sic habetur.

RA: V: cubica RA: 26 p: 5 m: RA: V: cubica RA: 26 m: 5

cubi partium RA: 26 p: 5 m: RA: 26 m: 5

hoc autem totum, ut liquet, est 10

Quad: partiũ, RA: V: cubica 51 p: R: 2600 R V: cu^ca 51 m: R 2600

triplicata q̃drata partium, R V: cub: 1377 p: R 1895400

RA: V: cubica 1377 m: R 1895400 partes ipsæ

m: RA: V: cubica R 26 m: 5. p: RA: V: cubica R 26 p: 5

Producta partium in triplata quadratorum

p: RA: V: cubica 49299354 p: 6885 m: RA: 47385000 m: 7020

m: RA: V: cubica 49299354 m: 6885 m: RA: 47385000 p: 7020

Porro hæ RA: cubicæ quatuor nominibus constantes, ad duas reduci possunt, cum enim 6885 dempseris ex 7020, relinquetur 135, detracta etiam radice 47385000, ex radice 49299354, relinquitur RA: 18954, igitur talia producta erunt RA: V: cubica RA: 18954 m: 135 m: RA: V: cubica RA: 18954, p: 135, cubus igitur totus, ex demonstratis in 3° libro est 10 p: RA: V: cubica RA: 18954 m: 135 m: RA: V: cubica RA: 18954 p: 135, at uero tres radices seu res sunt

RA: V: cubica RA: 18954 p: 135 m: RA: V: cubica RA: 18954 m: 135.

Iunctis igitur omnibus simul, cum radices illæ uniuersales cubicæ mutuo se deleant, fiet aggregatum cubi & trium rerum, 10, ad unguem.

Exemplum tertium, cubus & 6 res æquantur 2, duc 2, tertiam partem numeri rerum, ad cubum fit 8, duc 1 dimidium 2, ad quadratum fit 1, iunge 8 & 1, fiunt 9, huius radix est 3, ergo geminatæ 3, alteri adde 1 dimidium numeri, fiet 4, ab altero minue 1, similiter dimidium reliquum numeri, fit 2, minue igitur RA: cubi minoris ex maiore, habebis æstimationem rei, RA: cubicam 4 m: RA: cubica 2.

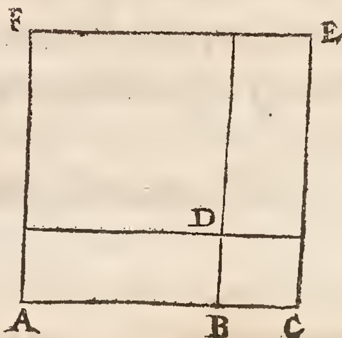
Memento autem eius, quòd in capitulo de educenda cubica radice in libro tertio dixeramus, quandoq; radices illas uniuersales cubicas, numero integro, uel fracto æquipollere, ut in primo exemplo docuimus, nam RA: V: cubica RA: 108 p: 10 m: RA: V: cubica RA: 108 m: 10, est 2 ut ibi ex regula patet, & ut experimento etiam notissimum est.

De

De cubo æquali rebus & numero. Cap. XII.

Demonstratio.


It etiam cubus æqualis rebus & numero, & sint duo cubi D C & D F, quorum latera A B & B C, producãt tertiam partem numeri rerum, inuicem ducta, & ipsi cubi iuncti æquales illi numero, dico A C esse rei quæsitæ æstimationẽ, cum enim ex A B, in B C, fiat tertia pars numeri rerum, ex A B in B C ter, fiet numerus rerũ, & ex A C in productum ex A B in B C ter, fient res ipsæ, posita A C re, at ex A C in productum A B in B C ter, fiunt sex corpora, quorum tria sunt ex A B in quadratum B C, alia tria ex B C in quadratum A B, hæc igitur sex corpora, æqualia sunt rebus, ipsa uero cum cubis D C & D F, ex primo supposito capituli sexti constituunt cubum A E, cubi etiam D C & D F, æquiualent numero proposito, igitur cubus A E, æqualis est rebus & numero propositis, quod erat demonstrandum, superest ostendere, quod triplum A C in productum A B in B C, sit æquale sex corporibus, id ostendã, si probauero ex A B, in B C ducto in A C, fieri duo corpora ex A B in quadratum B C, & ex B C in quadratũ A B, nam quod fit ex A C in productum A B in B C, æquale est ei, quod fit ex A B in superficiem B E, latera enim omnia omnibus sunt æqualia, sed hoc æquale est ei, quod fit ex A B in C D & D E, quod autem fit ex A B in D E, æquale est ei, quod fit ex C B in quadratum A B, quoniam latera omnia omnibus sunt ęqualia, quod igitur ex A C, in productum A B in B C fit, æquale est his, quæ fiunt ex A B in quadratum B C & ex B C in quadratum A B, quod est propositum.



Regula.

Regula igitur est, cum cubus tertiæ partis numeri rerum, maior non fuerit quadrato dimidij numeri æquationis, auferes ipsum ex eodem, & residui radicem, adde dimidio numeri æquationis, atq; iterum minue ab eodem dimidio, habebisq; ut dicunt, Binomium, & Apotomen, quorum ℞ cubicæ iunctæ rem ipsam constituunt. Exemplum, cubus æquatur 6 rebus p: 40, duc 2, tertiam partem numeri rerum, ad cubum, fit 8, aufer ex 400, quadrato 20, dimidij numeri, fit 392, huius radicẽ adijce ad 20, fit 20, p: ℞ 392, detrahe etiam ab eodem, fit 20 m, ℞ 392, horum ℞ cubicæ iunctæ, faciunt rei æstimationem,

nem, R V: cubicam 20 p: R 392 p: R V: cubica 20 m: R 392. Aliud, cubus ęquatur 6 rebus p: 6, tertiam partem numeri rerum, quę est 2, ad cubum, ducito, fit 8, detrahe ex 9 quadrato dimidij 6 numeri ęquationis, relinquitur 1, cuius R est 1, hanc adde & minue à 3, dimidio numeri, fiunt partes, 4 & 2, quarum R cubicæ iunctę, faciunt R cubicam 4 p: R cubica 2, æstimationem rei.

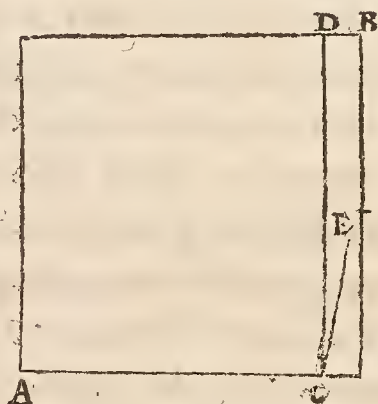
At ubi cubus tertiæ partis numeri rerum, excedat quadratum dimidij numeri, æquationis, quod accidit quandocunque numerus æquationis est minor $\frac{3}{4}$ cubi illius, uel ubi ex $\frac{2}{3}$ numeri rerum, producitur in R $\frac{1}{3}$ eiusdem numeri maior numerus numero ęquationis, tunc hoc dissoluitur per quæstionem Alizam, de qua in libro de quæstionibus Geometricis dictum est, sed si libet tantam effugere difficultatem, plerumque capitulum 25^m huius tibi satisfaciet.

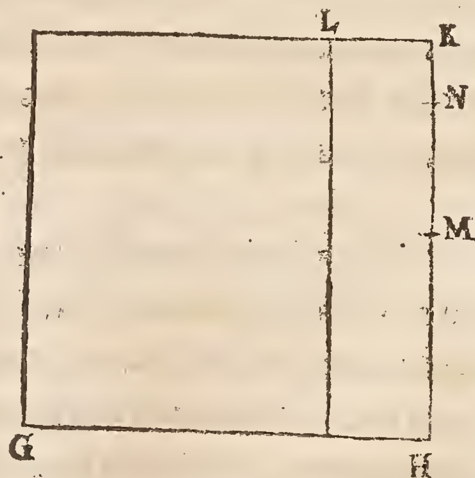
De cubo & numero æqualibus rebus. Cap. XIII.

DEMONSTRATIO.



Hoc capitulum ex præcedenti trahitur, sit igitur cubus G H, æqualis rebus A B, quæ describuntur quadrata superficie & numero F, & sit basis cubi G H, quadratũ G K, cuius pars quarta sit H L, residuum autem æquale A D superficiei, latus autem, quod Græce tetragonicum uocant, residui C D sit C E, sit uero M K dimidium H K, à qua abscindatur M N, æqualis C E, dico quod tam H N, quã N K, cubi, cum numero F, æquantur rebus A B, ut numerus rerũ & ęquationis idem maneat, & primo ostendamus de H N, constat enim cubũ H N continere latus suum, H N in quadrato H N, quadratum autem A B (quia G L æqualis est A D, & G L triplum est quadrati H M) æquale est triplo q̃drati H M, & quadrato M N, hæc autem superant, ex 4^a 2^i elementorum, quadratum H N, in duplo H M in N K, quare in eo quod fit ex H K in N K, quia H K dupla est ad H M, cubus igitur H N, cõtinet latus suum





F .... numerus.

h n in superficie a b minus eo, quod fit ex h k in k n. At uero, quia cubus g k continebat res seu latera h k in quadrato h k, uel in quadrato a b, cum numero f, igitur ex communi animi sententia, f numerus æqualis est producto ex h k in differentiam q̃dratorum a b & g k, at differentia g k & a b est, quanta differentia h l & c b, quia a d est æqualis g l differentia autem h l & c b est, ut quadrati h m & m n, igitur ex differentia quadrati h m, & m n in h k, fit f numerus, at uero ex 4^a 2^i elementorum, differentia quadratorum h m, seu m k, & m n, est duplum m n in n k, cum quadrato n k, & ideo m n & m k in n k, & ideo h n in n k, igitur ex h k in productum h n in n k fit f numerus, addatur igitur f numerus, cubo h n, & ex alia parte productum ex h k in k n ductum in h n producto ex h n in superficiem a b, minus producto h k in k n, fiet cubus h n cum numero æqualis h n ductæ in a b, seu rebus ex a b, quod erat probandum. Similiter, quia differentia g k & a b, quæ est h n in k n, ducta in k h, producit f, differentia etiam a b & quadrati k n (cum a b sit ęqualis quadratis h m & m k & m n, & ductui k m in m h) æqualis est differentiæ dupli k h in h n à quadrato n h, addito ei rectangulo h n in n k, at quod fit ex h n in n k cum quadrato n h, æquale est producto ex k h in h n, per 3^{am} 2^i elementorum, igitur quadratum a b superat quadratum n k in producto k h in h n semel, cum igitur numerus f, contineat n k in producto k h in h n, & cubus k n contineat k n in quadrato k n, erit, ut cubus k n cum numero f, seu cum producto ex k n in rectangulum k h in h n, æqualis producto a b in k n, igitur cubus k n cum eodem numero f, æqualis est a b numero rerum eidem. Ex hac demonstratione patet, quod æquatio cubi æqualis rebus & numero, æqualis est ambabus æquationibus cubi & eiusdem numeri æqualium totidem rebus, simul iunctis, uelut si cubus æqualis sit 10 rebus & 12, & æquatio sit ℞ 7 p: 1, æquationes cubi p: 12, æqualium 10 rebus quæ sunt 2 & ℞ 7 m: 1, simul iunctæ, facient ℞ 7 p: 1.

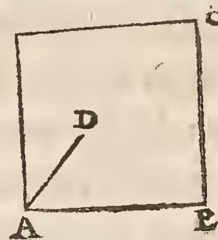
Regula.

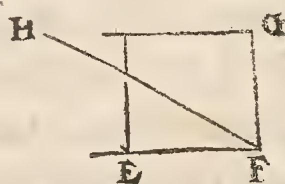
Regula igitur est, cum fuerit cubus & numerus æqualis rebus, inuenies æstimationem cubi æqualis totidem rebus, & eidem numero, cuius dimidium in se ducito & triplicato, hoc abijce ex numero rerũ, & ℞ residui, addita dimidio æstimationis cubi æqualis rebus & numero, uel detracta, ostendit æstimationem cubi & numeri æqualium rebus. Exemplum, cubus p: 3, æquatur 8 positionibus, tunc inuenio æstimationem cubi æqualis 8 rebus p: 3, ex præcedenti capitulo, & est etiam 3, huius dimidium duco in se, fit $2\frac{1}{4}$, triplica, fit $6\frac{3}{4}$, abijce ex 8 rerum

rerum numero, fit residuum 1 $\frac{1}{4}$, cuius R addita uel detracta ab 1 $\frac{1}{2}$ dimidio æstimationis cubi æqualis rebus & numero, ostendit utrasque æstimationes quæsitas alteram 1 $\frac{1}{2}$ p: R 1 $\frac{1}{4}$, reliquam 1 $\frac{1}{2}$ m: R 1 $\frac{1}{4}$.

DEMONSTRATIO.

Nunc etiam ostendamus, quomodo una æstimatione habita, absque auxilio præcedentis capituli habeatur & reliqua, & sit, ut ex A D in A C quadratum fiat numerus æquationis, ita quod quadrata A D & A C iuncta, faciant numerum rerum, eritque ex 8° capitulo, A D, rei æstimatio, & sit F H linea, cui si adderetur dimidium A D quadratum totius, æquale foret quadrato A C & quadrato dimidij A D, dico F H esse reliquam æstimationem, quando cubus cum numero ex A D in A C æqualis est rebus in quadrato A C, & quadrato A D, fiat quadratum E G, quod cum quadrato F H æquale sit quadratis A C & A D, iunctis, quia igitur quadratum compositę ex F H & dimidio A D, æquale est quadratis C A & dimidij A D, erit ex 4^a 2^i elementorum abiecto communi quadrato dimidij A D, quadratum A C æquale quadrato F H, & duplo F H in dimidium A D, quare rectangulo ex F H in A D semel cum quadrato F H, quare ex 16^a 6^i elementorum A B proportionalis inter F H & aggregatum F H & A D, quia uero quadratum E G, additum producto F H in se, & in A D, tantum facit, quantum additum, quadrato A C, E G uero, & F H quadratum, æqualia sunt quadratis A D & A C, ex supposito, erit quadratum A C & quadratum A D & productum F H in A D, æquale quadratis A C & E G, inde abiecto communiter A C quadrato, erit E G quadratum, æquale ei quod fit ex F H in A D cum quadrato A D, ex 16^a igitur 6^i, E F proportionalis est inter A D & aggregatum ex A D & H F, cumque similiter, ut ostensum est, A B sit proportionalis inter F H & aggregatum F H & A D, erit ex 34^a 5^i nostri super Euclidem, quia F H & A D iunctæ in utroque ordine sunt prima quantitas, proportio F H, ad A D, ut A B ad E F duplicata, quare ex 17^a 6^i elementorum, F H ad A D, ut A C ad E G, igitur ex 34^a 11^i elementorum, corpus quod sub F H & E G continetur, æquale est corpori sub A D & A C, quare & numero æquationis, cumque quadrata E G & H F, æquentur numero rerum, quia quadratis A C & A D, erit ex 8° capitulo huius, H F etiam æstimatio rei, in eodem capitulo. unde regula.





REGULA.

Duc dimidium primæ æstimationis in se, & triplica, & aufer à numero rerum, & R residui, detracto dimidio prioris æstimationis, est

æquatio

æquatio quæsita. Exemplum, cubus & 60, æquatur 46 rebus, & altera æquationum est 6, pro habenda reliqua duc 3, dimidium prioris æstimationis in se, fit 9, hunc triplica fit 27, abijce 27 ex 46, relinquitur 19, ab huius radice abijce 3, dimidium primæ æstimationis, habebis secundam æstimationem, ℞ 19 m: 3, & eadem ratione cum hac inuenires primam æstimationem, scilicet cum ℞ 19 m: 3, eodem modo ipsum 6.

De cubo æquali quadratis & numero. Cap. XIIII.



Vòd si cubus, æqualis sit quadratis & numero, conuertetur capitulum in cubum æqualem rebus & numero, primo conuersionis modo, qui est à toto ad partem, nam secundus est à parte ad totum, tertius à differentia partiũ, quartus à proportione.

Demonstratio.

Sit igitur cubus A E, in capituli 12 figura, æqualis 6 quadratis A C, & 100, cumq; quadratum A C, constet ex quadrato A B, & gnomone eum circundante, erit cubus A C æqualis quadratis 6 A B, & gnomonibus 6 & 100, gnomo autem constat quadrato B C, & duplo A B, in B C, igitur cubus A C constat 6 quadratis A B & 6 quadratis B C & 6 productis A B, in B C bis, & 100, at ex A B in B C bis, fiunt 4 res, quia A B est res, & B C, 2, & 6 quadrata B C, sunt triplum cubi B C, quia B C est tertia pars 6, igitur cubus A C, æqualis est 6 quadratis A B, & 24 rebus, & triplo cubi B C, & 100, at constat, quòd 24 numerus rerum, cõstat ex 6 numero quadratorum, in 4, qui est duplum tertiæ partis eiusdem numeri. At ex alia parte cõstat etiam, cubus A C, cubis A B & B C, & triplo A B in quadratũ B C, & triplo B C in quadratũ A B, hoc namq; in primo supposito 6[i] capituli ostensum est, igitur cubus A C, æqualis est cubis A B & B C & 6 quadratis & 12 rebus, igitur cubus A B, & cubus B C, & 6 quadrati, & 12 res, æquantur 6 quadratis & 24 rebus, & triplo cubi B C & 100, constat autem, quod numerus quadratorũ manet idem, quia est triplus ad B C, & B C fuit tertia pars numeri quadratorum, & numerus rerum est ex numero quadratorum in suam partem tertiam, hoc enim æquale est semper, triplo quadrati tertiæ partis, abiectis igitur cõmuniter cubo B C semel, & 6 quadratis, & 12 rebus scilicet tot rebus, quot fiunt ex numero quadratorum in suam tertiam partem, relinquetur cubus A B, æqualis 100, & 12 rebus, & duplo cubi B C, manifestum est autem, quod numerus 100, manet idem,

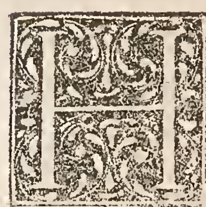
& quod numerus rerum fit ex numero quadratorum in tertiam sui partem, & quod duplum cubi B C, est 16, quia B C est 2, igitur cubus A B æqualis est 12 rebus, & 116 numero, ideo ex præcedenti capitulo, inuenta A B, addemus ei B C, tertiam partem numeri quadratorum, & conflabitur A C, & quia in quærendo A B, reducimus tertiam partẽ numeri rerum ad cubum, & hæc tertia pars numeri rerum, est quadratũ tertiæ partis numeri quadratorum, ideo ex ultima contractione sit hæc regula.

REGVLA.

Adde cubum tertiæ partis numeri quadratorum, dimidio numeri æquationis, & totum quod inde fit, in se ducito, à quadrato abijce cubum quadrati tertiæ partis numeri quadratorum, residui radicem adde & minue dimidio aggregati, quod in se duxeras, habebis Binomium & Apotomen, cuius R cubicam iunge, & eis adde tertiam partem numeri quadratorum, & totum quod conflatur, est rei æstimatio. Exemplum, cubus æquatur 6 quadratis p: 20, adde 8, cubum 2, tertiæ partis 6, ad 10, dimidium 20, fit 18, ab huius quadrato 324, abijce 64, cubum quadrati 2, relinquitur 260, cuius radicem adde & minue à 18, habebis 18 p: R 260, & 18 m: R 260, horum R cubicæ iunctæ, addita tertia parte numeri quadratorum, constituunt rem.

De cubo & quadratis æqualibus numero. Cap. XV.

DEMONSTRATIO.



Oc capitulum conuertitur secundo modo, differentia autẽ est, quod primus modus ostendit addendam tertiam partem numeri quadratorum, & secundus minuendam, sit igitur, in figura 12[i] capituli, cubus A B cum 6 quadratis A B, æqualis 100, & ponatur B C tertia pars numeri quadratorum, & compleatur cubus A C, erit igitur cubus A C æqualis cubo A B, & 6 quadratis, & 12 rebus, & cubo B C, ex primo supposito 6[i] capituli, loco igitur cubi A B & 6 quadratorum ponatur 100, nam illa erant æqualia 100, igitur cubus A C, æqualis erit 12 rebus, & cubo B C, & 100, at 12 res ex A B, deficiunt à 12 rebus ex A C in 12 B C, at illud 12, ut ostensum est in præcedenti, fit ex triplo quadrati B C, igitur 12 B C, est triplum cubi B C, igitur cubus A C & triplum cubi B C æquantur 12 rebus, & cubo B C, & 100, abiecto igitur cubo B C communi semel, erit cubus A B cũ duplo cubi B C, æqualis 12 rebus, & 100, duplum autem cubi B C est 16, & numerus rerum est triplum quadrati B C, tertiæ partis numeri

qua-

quadratorum,& ideo inuenta æſtimatione A C, abijciemus B C tertiam partem numeri quadratorum,& relinquetur A B cognita, ſecundum hoc erit regula.

Regula.

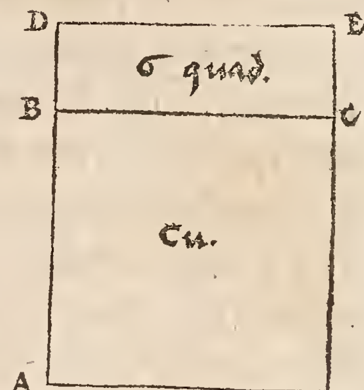
Duc tertiam partem numeri quadratorum, ad cubum, & duplica illum cubũ,& differentiam numero æq̃tionis ab eo ſume, inde triplica quadratum tertiæ partis numeri quadratorum,& habebis res, quæ æquantur cubo & numero, ſi duplum cubi fuit maius numero æquationis, uel res cum numero, æquales cubo, ſi duplum cubi minus ſit numero æquationis, uel res æquales cubo, ubi differentia numerorum nulla ſit, inde inuenta æquatione, minue ab ea tertiam partem numeri quadratorum,& reſiduum eſt rei ęſtimatio. Exemplum. Cubus & 6 quadrata æquantur 100, duc 2 ad cubum fit 8, duplica fit 16, abijce ex 100 habebis cubum, æqualem 84 p: 12 rebus, ſunt autẽ 12 res, triplum quadrati 2, tertiæ partis 6, numeri quadratorum, res igitur eſt, ex capitulo 12. ℞ v: cubica 42 p: ℞ 1700 p: ℞ v: cubica 42 m: ℞ 1700, ab hoc abijce 2, tertiã partem 6 erit rei æſtimatio quæſita, quando cubus & 6 quadrata æquantur 100, hæc, ℞ v: cubica 42 p: ℞ 1700 p: ℞ v: cubica 42 m: ℞ 1700 m: 2. Rurſus, ſit cubus & 6 quadrata, æqualia 25,& abijcio 16 duplum cubi tertiæ partis 6, ex 25, fient 9, & 12 res, ut prius, æquales cubo, res igitur ualet ℞ $5\frac{1}{5}$ p: $1\frac{1}{2}$, abijce 2 relinquitur æſtimatio quæſita, ℞ $5\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$. Rurſus, cubus & 6 quadrata æquantur 16, abijce duplum cubi 2, ſcilicet 16, ex 16 numero relinquitur nihil, deinde ſume triplum quadrati & eiuſdem tertię partis numeri quadratorum,& eſt 12, numerus rerum, æqualium cubo, quare quadratum æquatur 12, quare res eſt ℞ 12, abijce 2 tertiam partem 6 relinquitur rei æſtimatio, ℞ 12 m: 2. Rurſus, cubus & 6 quadrata, æquentur 7, ſume differentiam 7 & 16, dupli cubi 2,& eſt 9,& quia duplum cuborum eſt maius numero æquationis, & numerus rerum eſt 12, ut prius, habebimus cubũ p: 9, æqualem 12 rebus, ideo res ualet 3, uel ℞ $5\frac{1}{4}$ m: $1\frac{1}{2}$, abijce 2, erit æſtimatio cubi & 6 quadratorum 1, uel ℞ $5\frac{1}{4}$ m: $3\frac{1}{2}$ & hoc eſt in re m: quia $3\frac{1}{2}$ m: maius eſt quàm ℞ $5\frac{1}{4}$, & 6 quadrata ſunt 105 m: ℞ 9261, cubus uero eſt ℞ 9261 m: 98, ſi igitur iungantur cubus & 6 quadrata, fient 7 præciſe, ut patet.

Ex hoc eſt manifeſtum, cur capitulum, cubi & numeri æqualium quadratis, non demonſtratur ex capitulo cubi & quadratorum æqualium numero. Quemadmodum capitulum cubi & numeri, æqualium rebus, demonſtratum eſt ex capitulo cubi æqualis rebus & numero. Nam cum capitulum hoc perueniat aliquando ad capitulum cubi & Corm.

numeri æqualium rebus, melius est igitur ducere capitulum cubi & numeri æqualium quadratis, immediate ad capitulum cubi & numeri æqualium rebus, quàm ad idem capitulum, medio capituli cubi & quadratorum æqualium numero, nam & operatio longior, & demonstratio magis confusa euaderet.

DEMONSTRATIO.

Demonstratio alia Ludouici, similis nostræ uniuersali, capituli 7[i], & fuit inuēta hæc à Ludouico de Ferrarijs. Sit cubus A C & 6 quadrata, gratia exempli, C D æqualia 100, quia igitur B D, est altitudo 6 quadratorum, erit B D 6, posita igitur A D quadrato aliquo, erit A B quadratum m: 6, A C igitur superficies est 1 q̃d'q̃ d[is] p: 36, m: 12 quadratis, & hæc est basis corporis A E, quare corpus A E est 1 cu'q̃d[m] p: 36 q̃dratis m: 12 q̃d'q̃dratis, & hoc est æquale 100, igitur 10, radix 100, æquatur 1 cub. 6 co: radici 1 cu' q̃drati p: 36 q̃dratis, m: 12 q̃d'q̃dratis, æstimatio igitur rei est cognita, qua in se ducta, quia A D posita est 1 quadratum, habebitur A D, à qua detracta B D, quæ fuit 6, relinquetur A B, quæsita res.



REGVLA.

Regula igitur est, pone numerum quadratorum, numerum rerum, quæ cum ℞ numeri propositi æquantur cubo, & inuentā æstimationē in se ducito, à qua abijce productione numerum quadratorum seu rerum, residuum est rei æstimatio. Exemplum, cubus & 6 quadrata æquentur 40, dices igitur, cubus æquatur 6 rebus & ℞ 40, æstimatio rei, est ex suo capitulo, ℞ v: cubica ℞ 10 p: ℞ 2 p: ℞ v: cubica ℞ 10 m: ℞ 2, hanc in se ducito producetur ℞ v: cubica 12 p: ℞ 80 p: ℞ v: cubica 12, m: ℞ 80 p: 4, abijce 6 numerum rerum, relinquetur æstimatio quæsita, ℞ v: cubica 12 p: ℞ 80 p: ℞ v: cub. 12 m: ℞ 80 m: 2. Idem in-

Ex[m] uenies ex prima regula operatiōis, Probatio est, ut in exemplo, cubus & quadrata 3, æquentur 21, æstimatio ex his regulis est, ℞ v: cubica $9\frac{1}{2}$ p: ℞ $89\frac{1}{4}$ p: ℞ v: cubica $9\frac{1}{2}$ m: ℞ $89\frac{1}{4}$ m: 1, cubus igitur est hic constans ex septem partibus.

12 m: ℞ v: cubica, $4846\frac{1}{2}$ p: ℞ $23487833\frac{1}{4}$ m: ℞ v: cubica $4846\frac{1}{2}$ m: ℞ $23487833\frac{1}{4}$ p: ℞ v: cub. $46041\frac{3}{4}$ p: ℞ $2119776950\frac{7}{8}$ m: ℞ $2096289117\frac{9}{16}$ m: ℞ $2096354180\frac{13}{16}$
p: ℞ v: cub. $46041\frac{3}{4}$ p: ℞ $2096354180\frac{13}{16}$ m: ℞ $2096289117\frac{9}{16}$ m: ℞ $2119776950\frac{7}{8}$ p: ℞ v: cub. $256\frac{1}{2}$ p: ℞ $65063\frac{1}{4}$ p: ℞ v: cub. $256\frac{1}{2}$ m: ℞ $65063\frac{1}{4}$

Tria

Tria autem quadrata ſunt ex ſeptem partibus hoc modo
9 p: R v: cub. 4846 $\frac{1}{2}$, p: R 23487833 $\frac{1}{4}$, p: R v: cub: 4846 $\frac{1}{2}$ m: R 23487833 $\frac{1}{4}$ m: R v: cub. 256 $\frac{1}{2}$ p: R 65063 $\frac{1}{4}$ m: R v: 256 $\frac{1}{2}$ m: R 65063 $\frac{1}{4}$ m: R v: cub. 256 $\frac{1}{2}$ p: R 65063 $\frac{1}{4}$ m: R v: cub. 256 $\frac{1}{2}$ m: R 65063 $\frac{1}{4}$.
Inde iunctis tribus quadratis cum cubo ſex partes, quæ ſunt R v: cubicæ æquales p: cũ m: cadunt & relinquitur 21 adamuſsim aggregatũ.

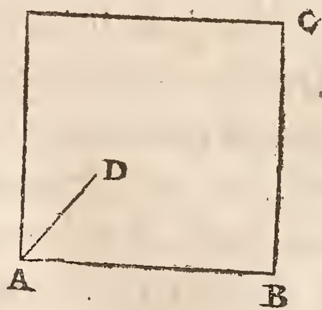
De cubo ac numero æqualibus quadratis. Cap. XVI.

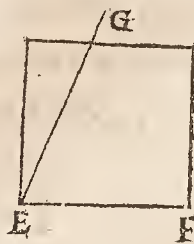
REGVLA.

HOc capitulum per ſe patet, ex demonſtratione 7ⁱ capituli, regula eſt, duc R cubicam numeri, in numerum quadratorum, producetur numerus rerum æqualiũ cubo, & eidem numero, inuentis autem æſtimationibus, duc R cubicam numeri in ſe, & productum diuide per quamlibet æſtimationem inuentã, exibit æſtimatio quæſita utraq;. Exemplum, 1 cubus p: 64, æquetur 18 quadratis, duc 18 in 4 R cubicam 64, fit 72, numerus rerũ æqualium cubo p: 64, huius æſtimationes ſunt ex capitulo ſuo, 8 & R 24 m: 4, cum quibus diuide 16, quadratum 4, R cubicæ 64, exit 2, & R 96 p: 8, & hæ ſunt æſtimationes.

DEMONSTRATIO.

Et ſit una æſtimationum habita A B, uolo habere reliquam, facio quadratum A B, quod ſit A C, & detraho A B ex numero quadratorum & relinquatur A D, & ducatur A D, in aggregatũ ex A B, & quarta parte A D, & ſuperficiei productæ ſumatur latus quod in eam poteſt, & ei addatur dimidium A D, & fiat E F, quam dico eſſe ſecundam æſtimationem, fiat quadratum E F, & ſumatur E G, quæ cũ E F iuncta, æq̃lis ſit aggregato A B & A D. Quia igitur E F quadratum, æquale eſt producto ex tetragonali in ſe, & dimidio A D in ſe, & producto tetragonalis in A D ex 4ª 2ⁱ elementorum, erit quadratum E F, æquale producto A D in aggregatum ex A B, & dimidio A D, & tetragonali ex 16ª 6ⁱ elementorum, igitur E F media inter A D & aggregatum A B & tetragonalis & dimidio A D, dimidium autem A D & tetragonalis conſtituunt E F, ex ſuppoſito, E F igitur proportionalis eſt, iter A D & aggre-





gregatum AB & EF. Rursus, quod fit ex AB & AD, in AB & EF, æquale est ei quod fit ex EF & EG, in aggregatũ AB & EF, quia ex supposito EF, & EG, æquantur AB, & AD & AB & EF manent idẽ, quod autem fit ex AD in AB & EF, ex probatis, æquale est quadrato EF, igitur quod fit ex AB in AB & EF, cum quadrato EF, æquale est ei quod fit ex EF & EG in EF & AB, abiecto igitur communi quadrato EF, erit quod fit ex AB in aggregatum AB & EF, æquale producto AB & EF in EG, cum eo quod fit ex EF in AB, detracto igitur communi iterum producto, AB in EF, relinquetur quadratum AB, æquale producto ex AB & EF in EG, quare AB media inter EG & aggregatum AB & EF, fuerat uero, ut dictum est, EF media, inter AD & aggregatum AB & EF, sunt igitur tres quantitates proportionales, in duobus ordinibus, quarum prima in utroq; ordine eadem est, uidelicet aggregatum AB & EF, igitur ex 34ª 5ⁱ nostri super Euclidẽ, EG ad AD, ut AB ad EF duplicata, quare ex 17ª 6ⁱ elementorum, EG ad AD, ut AC ad quadratũ EF, igitur ex 34ª 11ⁱ elementorum, corpus quod ex AD in AC, æquale est corpori ex EG in quadratum EF, sed AB fuit æstimatio rei igitur corpus quod ex AD in AC æquale est numero æquationis posito aggregato AD & AB numero quadratorum, per demonstrationem habitam in capitulo 8°, igitur productum ex EG in quadratum EF, est æquale numero æquationis, cum igitur EF & EG, sint æquales numero quadratorum, quia aggregato AB & AD, & ex GE in quadratum EF, fiat numerus æquationis, erit per 8ᵐ capitulum, EF rei æstimatio, quod erat probandum.

AB & EF	
AB	EF
EG	AD

REGVLA.

Regula igitur est, minue primam æstimationem à numero quadratorum, & residuum duc in aggregatum ex prima æstimatione, & quarta parte eiusdem residui, & producti accipe radicem, cui adde dimidium eiusdem residui, aggregatum est æstimatio rei quæsita. Exemplum, sit cubus cum 24 æqualis 8 quadratis, & æstimatio cognita 2, abijcio 2 ex 8, numero quadratorum relinquitur 6, hoc duc in $3\frac{1}{2}$, quod constat ex 2, prima æstimatione, & $1\frac{1}{2}$ quarta parte 6 residui, fit 21, cuius radici adde dimidium primæ æstimationis, quod est 1, fit R 21 p: 1, æstimatio quæsita.

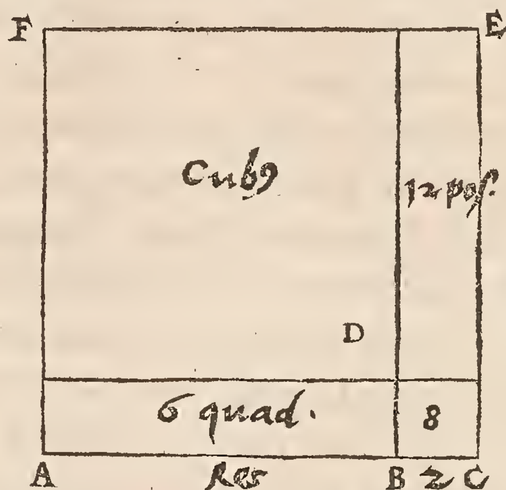
De cubo, quadratis & positionibus æqualibus numero. Cap. XVII.

DEMON-

DEMONSTRATIO.



Sit gratia exempli cubus A B,& 6 quadrata,& 20 positiones æqualia 100,& addam B C ad A B,quæ sit 2,tertia pars numeri quadratorum,& describitur cubus uniuersalis A C, secundum quod componitur ex suis octo partibus, erit igitur cubus A B, F D superficies cum sua altitudine, & cubus B C 8, quia B C est 2,& A D corpora, 6 quadratis A B, æqualia, & corpora de 12 A B seu duodecuplo A B ex sexto capitulo huius libri, quia igitur cubus A B & 6 quadrata & 20 positiones, æquantur 100, addantur 8 positiones, quæ sunt reliquum ad 20 positiones, cubo A C, qui iam ęquebatur cubo A B,& 6 quadratis,& 12 positionibus,& cubo B C, erit cubus A C cum 8 positionibus, æqlis 108, nam cubus A C excedit tria corpora D A,D E,D F,in cubo C D, qui est 8,at quia 8 positiones A B deficiũt A B, 8 positionibus A C cubi maioris, in 8 B C seu octuplo B C,quæ est 2,addemus igitur octuplum B C utricꝫ parti,& fiet cubus p: 8 rebus,ęqualis 124



nota igitur ex capitulo suo A C,auferemus B C, relinquitur A B. Sit rursus cubus A B,& 6 quadrata & 12 res,æqualia 100,igitur addito cõmuni cubo B C,erit cubus A C ęqualis 108,& A C ℞ cubicę 108,& A B 2 m: quàm A C cognita,sit denuo cubus & 6 quadrata A B & 2 positiones æqualia 100,additis igitur 10 positionibus residuis,ad complendum corpora D E,& addito cubo B C,fiet cubus A C æqualis 10 positionibus superadditis,& 108,sed 10 positiones A B deficiunt à 10 positionibus A C in 10 B C,addemus igitur 10 B C utricꝫ parti, fiet cubus A C p: 20,æqualis 10 positionibus p: 108,abijce 20 ex utracꝫ parte, relinquetur cubus A C æqualis 10 positionibus p: 88,inuenta A C, minue B C & relinquetur A B necessario cognita.

REGVLA.

Regula igitur communis est,duc 3am partem numeri quadratorum (quam hoc signo, tpq̃d: demonstramus) ad cubum, addecꝫ numero inde duc numerum quadratorum in sui tertiam partem, & producti differentia à numero rerum,est numerus rerum addendarũ cubo,ubi productum fuerit minus numero rerum propositarum uel addendarum numero,ubi productum fuerit maius numero rerũ propositarum. Si igitur differentia est nulla, producti & numeri rerum

erit

erit cubus æqualis numero iam coaceruato, inde ſumpta radice cubica numeri, minue ex ea Tpq̄d: & reſiduum eſt rei æſtimatio, quod ſi poſitiones & cubus, æquentur numero, duces numerum poſitionum in Tpq̄d: & productum addes numero iam aggregato, & habebis cubū, & res iam inuentas, æquales numero iam aggregato, inde ab æquatione minue Tpq̄d:, & reſiduum eſt æſtimatio Quod ſi productum fuerit maius numero rerum, duc differentiam, quæ eſt numerus rerum, in Tpq̄d: & productum minue ex numero, quē habebas, aggregato, & ſi nihil ſupereſt, habebis cubū, ęq̄lem rebus iam propoſitis tantū, quare deducendo ad minorem denominationem habebis q̄d^{m} æquale numero, & res erit ℞ quadrata numeri rerum, à qua minue Tpq̄d: & reſiduum erit æſtimatio rei. Quod ſi in detractione producti ex numero rerum in Tpq̄d: à numero aggregato, ſuperſit, numerus ille cum rebus iam propoſitis, æquatur cubo, inde ab æſtimatione minue Tpq̄d: & reſiduum eſt ęſtimatio quæſita. Sed ſi productum numeri rerum in Tpq̄d: maius eſſet numero iam aggregato, differētia eſt numerus, qui cum cubo æquatur rebus iam propoſitis, inde habita æſtimatione minue Tpq̄d: & reſiduum eſt æſtimatio rei.

Cor^{m}. Ex hoc patet, quod tale capitulum reſoluitur in quinq; capitula, quæ ſunt hæc in margine poſita, & non poſſunt reſolui in plura, in aliquibus autem ſequentium reſolutio fit in tria poſtrema tantum, in omnibus autem capitulis quatuor denominationum, cōmune eſt, cum fuerint reſoluta in capitulum trium uel duarum denominationum, ut æſtimationi inuentę addatur aut minuatur Tpq̄d: ut in hoc capitulo ſemper minuitur, & commune eſt etiam omni capitulo, ut rerum numerus & numerus ipſe conſtituantur eodem modo, uelut hic numerus rerum, eſt differentia numeri rerum aſſumptarum in capitulo quatuor denominationum, & producti ex numero quadratorū in ſui tertiam partem, & numerus capituli in quod reſoluitur, eſt differentia producti ex numero rerum iam inuentarū, in Tpq̄d: & aggregati ex cubo Tpq̄d: & numero æquationis primo.

cubus & res ęquales numero.
cubus æqualis numero.
cubus æqualis rebus.
cubus æq̄lis rebus & numero
cubus & numerus æq̄les reb⁹

QVÆSTIO I.

Exemplum. Eſt corpus quadratum undequaq;, quod cum ſuperficiebus & lateribus eſt 22, dices igitur, cubus & 6 quadrata & 12 res æquantur 22, cuba igitur 2, tertiam partem numeri quadratorum, fit 8, adde ad 22 fit 30, deinde duc 6 numerum quadratorū in 2 ſui partem

tem tertiam, fit 12, differentia cuius à numero rerum est nihil, nam res etiam fuerãt 12, habemus igitur 1 cubũ ęqualem 30, & res est ℞ cub. 30, abijce 2 tp q̃d: fit æstimatio rei, ℞ cub. 30 m: 2.

Experientia autem est, ut iungas 1 cub. p: 6 q̃d: p: 12 reb⁹, & fiũt 22.

Sex quadrata	24 p: ℞ cub. 194400, m: ℞ cub. 414720
cubus	22, m: ℞ cub. 194400, p: ℞ cub. 51840
Duodecim res	℞ cub. 51840 m: 24
Aggregatum 22	

Quæstio II.

Exemplum secundi. Inuenias quatuor numeros continue proportionales, quorum primus sit 3, & reliqui tres sint 19, pone 2ᵐ 1 rem, erit tertius $\frac{1}{3}$ q̃drati, & quartus erit $\frac{1}{9}$ cubi, igitur 1 positio $\frac{1}{3}$ q̃drati, $\frac{1}{9}$ cubi, æquantur 19, duc ad integra habebis cubum & 3 quadrata & 9 res, ęqualia 171, nam omnia ducuntur per 9, adde igitur cubum tertiæ partis numeri quadratorum ad 171, & est 1, fit 172, deinde duc 3 numerum quadratorum in sui tertiam partem fit 3, huius producti, & 9 numeri rerum, differentia est 6, numerus rerum, quæ cum cubo æquantur numero, quia productum fuit minus, duc igitur 6 numerum rerũ in 1 tp q̃d: fit 6, adde ad 172, fit 178, igitur cubus & 6 res ęquantur 178, & rei æstimatio est ℞ v: cubica ℞ 7929 p: 89 p: ℞ v: cubica ℞ 7929 m: 89, ab hoc minue tp q̃d: quæ est 1, habebis secundam quantitatem ℞ v: cubicam ℞ 7929 p: 89 m: ℞ v: cubica ℞ 7929 m: 89 m: 1, ex qua habebis reliquas.

Exemplum tertij modi. Cubus & 6 quadrata & 1 positio, æquantur 14, adde cubum 2 tp q̃d: qui est 8, ad 14, fit 22, deinde duc 6 numerum quadratorum in 2 tertiam sui partem, fit 12, differentia cuius à numero rerum est 11, numerus rerum ęqualium cubo cum numero, quia numerus productus 12 fuit maior numero rerum, duc igitur 11 in 2 tertiam partem numeri quadratorum, fit 22, differentia cuius & numeri prioris aggregati est nulla, quare habebimus cubum ęqualem 11 rebus, igitur quadratum æquatur 11, res igitur est ℞ 11, à qua minue 2 tp q̃d: fit rei æstimatio ℞ 11 m: 2, sumpsisti autem differentiam in numero & non aggregasti, quia res ęquabantur cubo, & non cubus cum rebus æquabantur numero, ut in præcedente exemplo.

Quæstio III.

Exemplum quarti modi. Ex oraculo iubet princeps fieri sacram ædem, cuius spacium sit 400 cubitorum, & longitudo latitudine maior sit 6 cubitis, latitudo altitudine 3 cubitis maior, quæritur quantitas. Pone Altitudinẽ rem, Latitudo erit 3 p: & Longitudo 9 p: duc

inuicem habebis 1 cub. p: 12 quadratis p: 27 positionibus, æqualia 400, adde ad 400, cubum 4 tpq̄d: qui est 64, fit 464, duc 12 numerū quadratorum in tertiam sui partem, fit 48, cuius differentia à 27, est 21, numerus rerum, quæ æquantur cubo cum numero, quare duc 21 in 4 tpq̄d: fit 84, sume differentiā à 464, quæ est 380, & eam adde rebus, quia aggregatum numerorum primum, fuit maius numero producto secundo, habebis cubum æqualem 21 positionibus p: 380, res igitur ualet ℞ v: cubicam 190 p: ℞ 35757, p: ℞ v: cub. 190 m: ℞ 35757, ab hac minue 4 tpq̄d: habebis altitudinem, qua habita, addendo 3 & 9 habebis latitudinem & longitudinem, ut uides

Altitudo	1	pos:
Latitudo	1	pos: p: 3
Longitudo	1	pos: p: 9
productum	1 cub. p: 12 q̄d: p: 27 pos:	

Altitudo, ℞ v: cub. 190 p: ℞ 35757 p: ℞ v: cub. 190 m: ℞ 35757 m: 4
Latitudo, ℞ v: cub. 190 p: ℞ 35757 p: ℞ v: cu. 190 m: ℞ 35757 m: 1
Longitudo, ℞ v: cu. 190 p: ℞ 35757 p: ℞ v: cu. 190 m: ℞ 35757 p: 5

Exemplum quinti modi. Cubus & 6 quadrata, & 2 res, æquantur 3, adde 8, cubum tpq̄d: ad 3 fit 11, deinde duc 6 in suam tertiam partem, fit 12, differentia à 2, numero rerum est 10, numerus rerum, duc in 2 tpq̄d: fit 20, cuius differentia ab 11, est 9 numerus, qui cum cubo æquatur 10 rebus, quia productum 2^m maius est numero aggregato, uoco autem productum secundum, quod fit ex numero rerum iam inuento, in tpq̄d: æstimatio igitur rei quando cubus & 9 æqualia sunt 10 rebus est 1, uel ℞ 9 $\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$, abijce igitur 2 tpq̄d: fient duæ æstimationes quæsitæ, altera ℞ 9 $\frac{1}{4}$ m: 2 $\frac{1}{2}$ alia m: 1.

De cubo, & rebus æqualibus quadratis & numero. Cap. XVIII.

DEMONSTRATIO.



Sit in eadem figura, cubus A C cum 33 A C, æqualis 6 quadratis A C p: 100, (gratia exempli) diuidatur cubus A C, posita B C tpq̄d: scilicet 2, in suas partes, erit cubus A C, æqualis cubo A B, cubo B C, sex quadratis A B, & 12 positionibus A B, at 33 A C, sunt 33 A B, & 33 B C, quæ sunt 66, quia B C est 2, igitur cubus A C, & 33 A C, æquantur cubo A B, cubo B C, sex quadratis A B, & 45 A B positionibus, & 66, hæc eadem igitur æq̄lia sunt 6 quadratis A C, & 100, at 6 quadrata A C, diuisa A C in B, per 4^am 2^i elementorum, æqualia sunt 6 quadratis A B, & 6 quadratis B C, & 12 superficiebus

ciebus A D,ſed A D eſt 2 poſitiões,quia B D eſt 2,igitur 12 A D ſunt 24 poſitiones A B,quare 6 quadrata A B,& 6 quadrata B C, & 24 poſitiones AB,& 100,æquantur cubo A B,cubo B C,6 quadratis A B,& 45 A B & 66 numero,cubus autem B C eſt 8,& 6 quadrata B C ſunt 24, igitur 6 quadrata A B & 24 poſitiones A B,& 124,æquantur cubo A B, & 6 quad. A B,& 45 poſitionibus A B,& 74,facta igitur detractione ſimiliũ ex utraq; parte, ſcilicet 6 quad. 24 poſitionibus & 74, relinquetur cub⁹ A B p:21 poſitionibus A B,æqualis 50,manifeſtum eſt igitur quòd inuenta A B,ex capitulo ſuo,& addita B C ei quæ eſt 2,conflatur A C. Manifeſtum eſt autem, quòd ubi poſitiones,quę cum cubo erant,eſſent æquales productis,haberemus cubum æqualem numero tantũ, & ubi poſitiones quæ cum cubo erant,eſſent pauciores, haberemus res ex una parte,& cubum ex alia,& tunc ſi numerus qui eſt cum cubo,foret æqualis alteri,eſſent poſitiones æquales cubo,& ſi eſſent minor, haberemus res & numerum æquales cubo,& ſi maior, haberemus res æquales cubo & numero,ex eadem demonſtratione,uelut in præcedente capitulo.

	6 q̃d^{ta} A B	24 poſ^{es} A B	124
cub⁹ A B	6 q̃d^{ta} A B	45 poſ^{es} A B	74
cub⁹ A B	p: 21 poſ^{bꝰ} A B æq̃les		50

Regula.

Regula igitur eſt,ut primo ſtatuas numerum rerum ſemper, ut in præcedenti capitulo,& eſt ut ducas numerum quadratorũ in tertiam ſui partem,& differentia huius producti,à numero rerum, eſt numerus rerum,quæ ſi nulla ſit,habebimus cubum æqualem numero,ſi autem productum ſit minus numero rerum,differentia erit numerus rerum,quę cum cubo ęquantur numero,& ſi productum fuerit maius, habebimus res æquales cubo,& tunc ſi numeri erunt æquales,erit cubus æqualis rebus,& ſi qui producitur ex numero rerum, in Tp q̃d: fuerit minor numero æquationis cum additione,erit cubus ęqualis rebus & numero, quod ſi productus numerus ex rerum numero in Tp q̃d: fuerit maior numero æquationis cum ſua additione, habebimus res æquales cubo & numero,numerus autem æquationis ſic habetur,duc priorem numerum rerum,in tertiam partem numeri quadratorum,& producti accipe differentiam, cum aggregato numeri æquationis,& dupli cubi Tp q̃d: differentia, erit numerus addendus cubo uel rebus,prout oportuerit,uel numerus æq̃lis cubo, ubi nullæ ſint res,inde habita æſtimatione,eam adde uel minus Tp q̃d: prout in exemplis doceberis,& habebis quæſitam æſtimationem.

Exemplum primum. Cubus & 12 res, æquantur 6 quadratis &

25, duc 6 in 2, sui tertiam partem, fit 12, differentia cuius à numero rerum nulla est, igitur cubus æquabitur numero, duc ergo 12 numerū rerum, in 2 τpq̄d: fit 24, abijce ex 41, aggregato 16 dupli cubi 2, & 25 numero æquationis, relinquitur 17, qui æquatur cubo, res igitur est ℞ cubica 16, adde ei 2 τpq̄d: fit rei æstimatio ℞ cubica 17 p: 2.

Exemplum secundum. Mercator fugiens, paciscitur redditurum $\frac{3}{4}$ debiti proportionaliter in tribus annis, ita quod si pactus fuisset redditurum $\frac{19}{27}$ primo anno reddidisset $\frac{9}{27}$, secundo $\frac{6}{27}$, tertio $\frac{4}{27}$, ut residua sint in eadem proportione, cum residuo capitali, quæritur portio cuiusq; anni, reddendo solum $\frac{3}{4}$, & ponamus, quod capitale sit 4, ad uitandum fractiones, uult igitur reddere 3, pone igitur quod restituat primo anno rem, igitur secundo anno restituet rem m: $\frac{1}{4}$ q̄d^ti^, & tertio anno, rem m: $\frac{1}{2}$ q̄drati p: $\frac{1}{16}$ cubi, igitur in tribus annis restituet 3 res p: $\frac{1}{16}$ cubi m: $\frac{3}{4}$ q̄drati, & hoc iam supponitur 3, quare reducito ad integrum, cubum ducendo per 16, habebis 1 cubum p: 48 rebus, æqualem 12 q̄dratis p: 48, duc 12 in 4 tertiam sui partem, fit 48, igitur differentia rerum nulla est, & cubus æquabitur numero, duc igitur 48, numerum rerum, in 4 τpq̄d: fit 192, à quo detrahe 176, aggregatum ex duplo cubi 4, & 48 numero æquationis, relinquitur 16, & hic æquatur cubo, igitur rei æstimatio est ℞ cubica 16, quam minue ex 4, τpq̄d: fiet æstimatio quæsita 4 m: ℞ cubica 16, reddet igitur anno primo 4 m: ℞ cubica 16, & secundo ℞ cubicam 16 m: ℞ cubica 4, & tertio, ℞ cubicam 4 m: 1, & horum residua, sunt proportionalia, cum 4, & iuncta faciunt 3, & est conuersum primi exempli, & residua ipsa sunt ℞ cubica 16, ℞ cubica 4, & 1.

Exemplum tertium. Cubus & 15 res, æquantur 6 q̄dratis & 24, duc 6 in sui tertiam partem, fit 12, cuius differentia à 15 numero rerum, est 3, & quia productum fuit minus, erit cubus & 3 res, æqualia numero, duc igitur 15 numerum rerum, in 2 τpq̄d: fit 30, minue ex 40, aggregato 24 & duplo cubi τpq̄d: relinquitur 10, igitur 10 æquatur cubo p: 3 rebus, & rei æstimatio est ℞ v: cubica ℞ 26 p: 5, m: ℞ v: cubica 26 m: 5, cui adde 2 τpq̄d: habebis quæsitam æstimationem.

Exemplumquartū. Cubus & 15 res, æquantur 6 q̄dratis p: 10, iterū habebo cubū & 3 res, æq̄les numero, & numerus ꝓductus erit 30, ut prius, uerum aggregatum ex duplo cubi 2, τpq̄d: & 10 numero æquationis, est 26, differentia igitur est 4, cum igitur cubus & 3 res æquentur 4, rei æstimatio est 1, & quia productus numerus est maior aggregato, id est 30, maior est 26, minuemus 1 æstimationem

æqua-

æquationis inuentæ ex 2, ℞ q̃d: & relinquetur 1 æstimatio quæsita cubi & 15 rerum, æqualium 6 quadratis & 10.

Ideo patet quod in hoc casu, ubi cubus & res, æquantur numero, si differentia numerorũ nulla foret, uelut si loco 10, posuissemus 14, æstimatio rei esset ℞ q̃d: scilicet 2, quia in æquatione inuenta, nihil haberemus addendum uel minuendũ, quia cubus & 3 res, æquarentur nihil.

Exemplum quintum. Cubus & 10 res, æquatur 6 quadratis p: 4, duc igitur numerum quadratorum in tertiam sui partem, ut prius, fit 12, differentia cuius à numero rerum, est 2, & quia productum est maius numero rerum, ideo 2 res ęquabuntur cubo, pro numero itaq; duc 10 numerum rerum primum, in 2 ℞ q̃d: fit 20, differentia cuius à 20, aggregato dupli cubi ℞ q̃d: & 4, est nihil, igitur nõ habebimus numerum, sed cubus æquabitur, ut dictum est, 2 rebus, igitur deprimendo, quadratum æquabitur 2, ergo rei æstimatio, est ℞ 2, quam adde uel minue ℞ q̃d:, habebis ueram æstimationum quæsitam, 2 p: ℞ 2, uel 2 m: ℞ 2, & potest etiam esse 2, & sic habet tres æstimationes hic casus.

Exemplum sextum. Sit cubus & 21 res, ęqualia 9 q̃d^tis p: 5, tunc ut prius, ducam 9, in 3 tertiam sui partem, fit 27, huius differentia à 21, est 6, numerus rerum, cubo æquandarum, quia productum 27, est maius 21 numero rerum, addo igitur 54, duplum cubi ℞ q̃d: ad 5 numerum æquationis fit 59, cuius differentia, à 63, producto numeri rerum prioris, in ℞ q̃d: est 4, igitur quia productum est maius aggregato, addemus numerũ cubo, & fiet 1, cubus p: 4, æqualis 6 rebus, iam inuentis, huius igitur æstimationes sunt tres, prima est 2, secunda ℞ 3 m: 1, tertia ficta m: ℞ 3 p: 1, quas adde ad 3 ℞ q̃d: habebis ueras æstimationes illas quas à latere uides.

Prima	5
Secunda	2 p: ℞ 3
Tertia	2 m: ℞ 3

Exemplum septimum. Cubus & 26 res, æquantur 12 quadratis p: 12, duc 12 numerum quadratorum, in sui tertiam partem, quæ est 4, fit 48, cuius differentia à 26, numero rerum, est 22, & quia productum est maius numero rerum, res ęquabuntur cubo, deinde duc 26 numerum rerum, in 4 tertiam partem numeri quadratorum, fit 104, abijce ex 140 duplo cubi ℞ q̃d: & 12 numeri simul iunctis, fit 36, numerus addendus rebus, quia aggregatum est maius producto, econtrario, exemplo præcedenti, cubus igitur æquabitur 22 rebus, p: 36, quare eius erunt tres ęstimationes, prima ℞ 19 p: 1, & est uera, secunda ficta m: ℞ 19 m: 1, tertia etiam ficta, quæ est m: 2, has adde singu-

 las,

las, T p q̄ d: habebis ueras tres æstimationes, quarum experientiam à latere in margine posui.

Prima	5	p: R 19
Secunda	5	m: R 19
Tertia	2	

Ex hoc patet, quòd numerus quadratorum, in his tribus exemplis, in quibus æstimatio rei triplicatur, semper componitur ex tribus æstimationibus iunctis simul, ue lut in quinto exemplo, 2 p: R 2, & 2, & 2 m: R 2, componunt 6, numerum quadratorum, & in sexto exemplo, 5, & 2 p: R 3, & 2 m: R 3, componunt 9, numerum quadratorũ, & in septimo exemplo, 5 p: R 19, & 5 m: R 19 & 2, componunt 12, numerum quadratorum, ideo duabus cognitis, tertia semper emergit, & causa est cognita in initio huius libri. Et manifestum est, quòd cum peruenimus ad res, quæ à cubo separantur, seu numerus rebus, seu cubo iungatur, semper emergunt tres æstimationes, & causa dicta est superius ibidẽ, ubi de uera & ficta æstimatione locuti sumus. Et patet etiam, quòd omnes modi hi, ad additionem semper possunt referri, quamuis minus cum additur, uicem gerat plus cum detrahitur, ostensum est enim quod tantum est minuere 4 ex 12, quantum addere 4 m: ad 12, utroq; enim modo fiet 8.

cubus primæ	410 p: R 167884
26 res	130 p: R 12844
aggregatum	540 p: R 273600
12 quadra.	528 p: R 273600
numerus	12
aggregatum	540 p: R 273600
cub⁹ secundæ	410 m: R 167884
26 res	130 m: R 12844
aggregatum	540 m: R 273600
12 quadra.	528 m: R 273600
numerus	12
aggregatum	540 m: R 273600
cubus tertiæ	8
26 res	52
aggregatum	60
12 quadra.	48
numerus	12
aggregatum	60

Est etiam demonstratio alia huius capituli inuenta à Ludouico Ferrario, clarius ostendens rationem harum operationum.

ALIA DEMONSTRATIO.

Sit igitur cubus & 100 res æqualia 6 quadratis p: 10 numero. Et ponatur A B rei æstimatio, B C T p q̄ d: A G autem æqualis, B C, quare G B est differentia A B & B C, cubus autem G B, est differentia cubi A B cum triplo A B, in quadratum B C, à cubo B C cum triplo B C in quadratum A B, ex sexto capitulo, cubus uero A B cum 100 rebus, æquatur 6 quadratis p: 10, ex supposito, 6 quadrata autem A B, sunt triplũ B C in quadratum A B, triplum igitur B C in quadratum A B, & cubus

B C,

B C, qui eſt 8, ſunt 2 m: quàm cubus A B cum 100 rebus, dico autem 2 m: quia cubus B C, qui iungitur 6 quadratis, debuit eſſe 10, & eſt tantum 8, at cubus A B cum 100 rebus, ſuperat cubum A B, & triplũ A B in quadratum B C, quod eſt 12 res, in 88 rebus, differentia igitur cubi B C, & tripli B C in quadratum A B, à cubo A B, cum triplo A B in quadratum B C, eſt 88 A B, m: 2, huic igitur differentiæ, æqualis eſt cubus G B, ut diximus, ponatur igitur B G res, erit igit̃ G C ſeu A B, 2 m: re, cuius quantitas ſumpta 88 uicibus, ut dictum eſt, æquatur cubo B G p: 2, igitur cubus B G, p: 2, p: 88 ſuis rebus, æqualis eſt 176, quare cubus B G cum 88 ſuis rebus, æquatur 174, quare ſi eam æſtimationem B G detraxeris ex B C, quæ eſt Tp̃q̃d: ſcilicet 2, habebis quantitatem A B, quæſitam.

Res A B G C

Alia Demonstratio.

Ponatur rurſus, cubus cum 5 rebus, æqualis 6 quadratis ac 10, & ponatur E F res, D E Tp̃q̃d: differentia D E & E F, E H, eritq́; ex demonſtratione conſimili præmiſſæ, ut cubus E H, æquetur 7 reb⁹ p: 16, inde inuenta æſtimatione, ſi ei addatur H F Tp̃q̃d: quæ eſt 2, habebitur E F res quęſita, nec in hoc addam uerba, quia demonſtratio eſt ſimilis præmiſſæ, & operatio eius in hac parte, eſt clarior in noſtra demonſtratione.

2 D E H res F

Regula.

Regula igitur ſumpta ex hac demonſtratione eſt, ſi numerus rerum æqualis eſt, producto ex numero quadratorum in ſuam tertiam partem, duc Tp̃q̃d: ad cubum, ℞ cubicam differentiæ huius, & numeri æquationis, adde Tp̃q̃d: ubi cubus ſit minor numero, aut minue, ubi ſit maior, & totum eſt æſtimatio rei, manifeſtum eſt autem, quòd ubi cubus Tp̃q̃d: & numerus, ſint æquales, non addemus nec minuemus, ſed Tp̃q̃d: erit ipſa rei æſtimatio.

Exemplum. Cubus & 12 res, æquantur 6 quadratis p: 8, tunc quia ducto 6, numero quadratorum, in 2 ſui tertiam partem, fit 12, numerus rerum, ad unguem, ideo duc 2 Tp̃q̃d: ad cubum, fit 8, cuius differentia à numero æquationis nulla eſt, ideo æſtimatio rei eſt 2 Tp̃q̃d: Et ſi cubus & 12 res, æquantur 6 quadratis p: 9, tunc quia cubus æquatur numero, abijciemus 8, cubum Tp̃q̃d: ex 9, relinquitur 1 cuius ℞ cubicam quæ eſt 1, addo Tp̃q̃d: quia cubus Tp̃q̃d. eſt minor æquatione numeri, fit rei æſtimatio 3. Et eadem ratione, ſi cubus p: 12 rebus, æquetur 6 quadratis p: 7, detracto 7 ab 8, cubo Tp̃q̃d. relinqui-

linquitur 1, cuius ℞ cubicam quæ est 1, detrahe ex 2, τρq̄d. relinquitur 1, rei æstimatio.

Quòd si numerus positionum, maior sit producto ex numero quadratorum in sui partem tertiam, differentia erit numerus rerum, ut in prima demonstratione, & suis regulis, hunc duc in τρq̄d. & ei adde cubum τρq̄d. & huius aggregati, numeriq; æquationis differentia, est numerus æquationis cubi, & talium rerum differentia, si nulla sit, æstimatio rei est τρq̄d. Et si numerus æquationis est minor aggregato, æstimationem inuentam minue, & si maior, adde τρq̄d. quod fiet, erit rei æstimatio. Exemplum, cubus & 20 res, æquantur 6 quadratis & 24, ducto 6 in 2, tertiam partẽ sui, fit 12, cuius differentia à 20, numero rerum, est 8, numerus rerum, quæ cum cubo æquantur numero, duc igitur 8 numerum rerum, in 2 τρq̄d. fit 16, adde ei 8, cubum τρq̄d. fit 24, differentia cuius nulla est à 24 numero æquationis, igitur æstimatio rei est τρq̄d. scilicet 2, sit rursus cubus cũ 20 rebus, æqualis 6 quadratis & 15, habebimus igitur, ut prius, cubum & 8 res, pro numero, duc ut prius, 8 numerum rerum posteriorem in 2 τρq̄d. fit 16, adde cubum τρq̄d. fit 24, abijce 15, relinquitur 9, igitur cubus & 8 res, æquatur 9, & rei estimatio est 1, quod minue ex 2, τρq̄d. relinquitur uera æstimatio rei 1, minuisti autem, quia 15 numerus æquationis, est minor aggregato cubi & producti, quod est 24, & si bene animaduertis, eodem modo fit in prima parte regulæ, quando numerus rerum æqualis est producto ex numero quadratorum in sui partem tertiam. Rursus, cubus cum 20 rebus, æqualis sit 6 quadratis p: 33, habebis itaq; cubum, ut prius, & 8 res, æquales differentiæ 24 aggregati, & 33 numeri æquationis, quare cubus & 8 res, æquabuntur 9, & æstimatio rei erit 1, addendum τρq̄d. quia numerus æquationis 33, est maior numero aggregato 24, quare rei æstimatio erit 3.

Quòd si numerus positionum, minor sit producto ex numero quadratorum in sui tertiam partem, differentia nihilominus erit numerus rerum, ut prius, sed hæ non copulabuntur cubo, imò erunt ei æquales, deinde duc ipsum numerum rerum posteriorum, in τρq̄d, & productũ iunge numero æquatiõis, huius aggregati & cubi τρq̄d. differentia est numerus æquationis secundæ, si igitur differentia nulla est, cubus æquabitur rebus, & ℞ quadrata numeri rerum addita τρq̄d. est æstimatio rei, quod si aggregatum sit maius cubo, erit differentia, numerus qui cũ rebus ęquatur cubo, inde habita æstimatione, adde ei τρq̄d. & fiet uera æstimatio. Quòd si cubus fuerit maior aggrega-

gregato, differentia erit numerus, qui cum cubo æquatur rebus, inde habita æstimatione, adde ei ṫpq̄d. quod conflatur, est rei uera æstimatio, & tam multiplex habenda, ut in nostra regula docuimus, quanquam quod ad regulam pertinet, & hæc nostra sit. Exemplū igitur, Cubus & 9 res, æquales sint 6 quadratis p: 2, tunc numerus rerum secundus erit 3, duc in 2, ṫpq̄d. fit 6, adde ad 2 numerum æquationis, fit 8, cubus autem ṫpq̄d. est 8, differentia nulla, igitur cubus æquatur 3 rebus, res igitur est ℞ 3, & rei æstimatio 2 p: ℞ 3. Rursus, cubus p: 9 rebus, æqualis sit 6 quadratis p: 4, habebimus ut prius, cubum æq̄lem 3 rebus, pro numero duc 3 numerum rerum posteriorem in 2 ṫpq̄d. fit 6, adde 4, numerum ęquationis, fit 10, abijce 8, cubum ṫpq̄d. fit 2, addendus rebus, quia aggregatum est maius cubo ṫpq̄d. igitur cubus æquatur 3 rebus, p: 2, & res erit 2, addito 2 ṫpq̄d. fit 4, uera æstimatio. Iterum, sit cubus p: 21 rebus, æqualis 9 quadratis p: 5, erunt igitur 6 res in posteriore æquatione, quia 9 numerus quadratorum, ductus in 3, tertiam sui partem, producit 27, duc igitur 6 numerum posteriorem rerum, in 3, ṫpq̄d. fit 18, adde ei 5, fit 23, differentia cuius à numero producto ex cubo c ṫpq̄d. est 4, & quia aggregatū est minus cubo, ideo cubus & 4, æquabuntur 6 rebus, æstimatio igitur est 2, uel ℞ 3 m: 1, & ficta ℞ 3 p: 1, quæ est m: si igitur his addas 3 ṫpq̄d. habebis æstimationes quæsitas 5, & 4 p: ℞ 3, & 2 p: ℞ 3, in harum qualibet uerum est, quod cubus & 21 res, æquales sunt 9 quadratis & 5 numero.

De cubo & quadratis, æqualibus rebus & numero. Caput XIX.

Demonstratio.


It etiam cubus a b, & 6 quadrata, æq̄lia 20 rebus p: 200, gratia exempli, & ponemus b c 2, ṫpq̄d. erit igitur a c res p: 2, & eius cubus, erit cubus & 6 quadrata, & 12 res, & 8 iam autem suppositum est, quod cubus a b & 6 quadrata, sint æqualia 20 rebus p: 200, igitur ponantur, 20 res & 200, loco cubi, & 6 quadratorum, & fiet cubus a c, æqualis 32 rebus p: 208, at quia 32 res a b, deficiūt à 32 rebus a c, in 32 b c, addantur utrique parti 32 b c, erunt igitur 32 res p: 208, æquales cubo p: 64, tantum enim sunt 32 b c, abijce 64 ab utraque parte, erit cubus æqualis 32 rebus p: 144, inde inuenta æstimatione abijce b c, ṫpq̄d. relinquetur a b.

Regula.

Regula igitur eſt, duc numerum quadratorum, in tertiam ſui partem, productum adde numero rerum, & aggregatum erit numerus rerum, inde duc hunc numerum in тpq̃d. & producti ſume differentiam, ab aggregato ex numero æquationis, & cubo тpq̃d. quæ ſi nulla eſt, habebis cubum æqualem rebus, ſi uero ſit productum minus aggregato, differentia eſt numerus, qui cum rebus æquatur cubo, quod ſi productum fuerit maius aggregato, differentia eſt numerus qui cum cubo æquatur rebus, inde habita æſtimatione, minue тpq̃d. residuum eſt æſtimatio uera, quæſita.

Exemplum, Cubus & 6 quadrata, æqualia ſunt 20 rebus & 56, duc 6 in 2 tertiam ſui partem, fit 12, adde ad 20 fit 32, duc 32 in 2 тpq̃d. fit 64, adde ad 56 numerum ęquationis 8 cubum тpq̃d. fit 64, differentia producti ab aggregato nulla eſt, res igitur æquabuntur cubo, quare deprimendo q̃dratum ęquatur 32, & res eſt ℞ 32, & uera æſtimatio ℞ 32 m: 2. Rurſus, cubus & 6 quadrata, æqualia ſint 20 rebus p: 112, duc 6 in 2, ut prius, fit 12, adde ad 20, fit 32, numerus rerum, duc in 2 тpq̃d. fit 64, abijce ex 120 aggregato cubi тpq̃d. & numeri æquationis, relinquitur 56, numerus qui cum 32 rebus, æquatur cubo, res igitur eſt ℞ 29 p: 1, minue тpq̃d. relinquitur æſtimatio rei ℞ 29 m: 1. Rurſus, cubus & 6 quadrata, æqualia ſint 20 rebus p: 41, habebis igitur ut prius, in ſecunda æquatione, 32 res, & 15 numerum, nam detracto 49 aggregato numeri ęquationis & 8 cubi тpq̃d. ex 64, producto 32 in тpq̃d. relinquitur 15, quia uero productum eſt maius aggregato, erit 15 cum cubo, æqualis 32 rebꝰ, & res erit 5, uel ℞ $13\frac{1}{4}$ m: $2\frac{1}{2}$, uel ficta ℞ $13\frac{1}{4}$ p: $2\frac{1}{2}$, abijce 2 тpq̃d. habebis æſtimationem ueram 3, & duas fictas per m: ſcilicet $4\frac{1}{2}$ p: ℞ $13\frac{1}{4}$, & $4\frac{1}{2}$ m: ℞ $13\frac{1}{4}$, ſicut diximus in capitulo primo.

De cubo æquali quadratis rebus & numero. Cap. XX.

DEMONSTRATIO.

SIt iterum cubus A C, æqualis 6 quadratis, 5 rebus, & 88 (gratia exempli) & ponatur B C тpq̃d. ſcilicet 2, manifeſtum eſt igitur, quod cubus A C, æquatur 6 quadratis A B & 12 A B, & cubis A B, & B C, hæc eadem igitur æqualia ſunt 6 quadratis A C, 5 rebus A C, & 88, abijciatur iam cubus B C communis, ſcilicet 8, relinquentur, cubus A B & 6 quadrata A B, & 12 A B, æqualia 6 quadratis A C, 5 rebus A C, p: 80, at 6 quadrata A C, ſuperãt 6 quadrata A B in 6 gnomonibus A B quadrati, & erunt 24 res ex A C, minus

minus 6 quadratis B C, quæ sunt 24, igitur 6 quadrata A B & 29 res A C, & 56, æqualia sunt cubo A B, & 6 quadratis A B, & 12 rebus A B, abijciantur igitur 6 q̃drata A B, cõmunia, relinquentur 29 res A C, p: 56, æq̃les cubo A B, & 12 rebus A B, & 29 res A C, superant 29 res A B, in 29 B C, quare in 58, quia B C est 2, igitur addatur numerus numero, erunt 29 A B & 114, æqualia cubo A B & 12 rebus A B, abijciantur de nuo 12 res communes, erunt 17 res p: 114, æquales cubo, inde habita æstimatione, adde ei B C.

Regula.

Regula igitur est, Duc numerum quadratorum in tertiam sui partem, & productum adde numero rerum, aggregatum erit numerus rerum, æqualium cubo, pro numero autem, duc numerum rerum secundum in T p q̃d. & productum adde numero æquationis, à quo minue cubum T p q̃d. residuum est numerus, qui cum rebus æquatur cubo, inde inuenta æstimatione, adde ei T p q̃d. & habebis uerum æstimationem.

Quæstio.

Exemplum, in hac quæstione, Quidam dedit aureos 1728 ad caput anni ut dicunt, seu sub usura rediuiua, ea conditione, ut reciperet tertio anno, ex capitali & usura, quantum est dimidium capitalis, & dimidium eius quod debuisset in fine primi anni, & dimidiũ eius quod debuisset in fine secundi anni, ubi retinuisset pecunias, & uoluisset soluere sub eadẽ usura. Pone igitur quod in capite primi anni haberet 144 res, in capite secundi anni habebit 12 quadrata, in capita tertij anni habebit cubum, & hic erit æqualis dimidijs reliquorum annorum simul sumptis, igitur cubus erit æqualis 6 q̃dratis 72 rebus & 729, duc igitur 6 numerum quadratorum in 2, tertiam sui partem, fit 12 adde ad 72 fit 84, numerus rerum, duc 84 in 2 T p q̃d. fit 168, adde ad 729, fit 897, abijce 8, cubum T p q̃d. fit 889, igitur cubus æquatur 84 rebus p: 889, æstimatio igitur huius erit R v: cubica $444\frac{1}{2}$ p: R $175628\frac{1}{4}$, p: R v: cubica $444\frac{1}{2}$, m: R $175628\frac{1}{4}$, huic adde 2 T p q̃d. habes quæsitam æstimationem R v: cubicam $444\frac{1}{2}$ p: R $175628\frac{1}{4}$ p: R v: cubica $444\frac{1}{2}$ m: R $175628\frac{1}{4}$ p: 2, cuius cubus est quantitas pecuniarũ, quæ ei debentur tertio anno, inde detracto 1728, habebis sortem, per terminos proportionales.

De cubo & numero, æqualibus quadratis & rebus.
Caput XXI.

Demonstratio.


It cubus & 100, æqualia etiam 6 quadratis, & 24 rebus, & sit cubus ille A C, & B C tp̄q̄d. cunctis cubus A C, æqualis sit cubo A B & 6 quadratis A B, & 12 rebus A B, & cubo B C, qui est 8, erit cubus A B, & 6 quadrata A B, & 12 res A B, & 108, æqualia 6 quadratis A C, & 24 rebus A C, sed 6 quadrata A B, minora sunt 6 quadratis A C, in 6 gnomonibus A D E, & 24 res A B, minores sunt 24 rebus A C, in 24 B C, quare cubus A B, & 6 quadrata A B, & 12 res A B, & 108, æquantur 6 quadratis A B, & 6 gnomonibus A D E, & 24 rebus A B, & 48, nam 24 B C sunt 48, igitur abiectis ex utraque parte 6 quadratis A B, & 12 rebus A B, & 48, erit cubus A B, & 60, æqualis 6 gnomonibus A D E, & 12 rebus A B, sunt autem 6 gnomones A D E, 24 res A B, p: 24, eo quod quælibet superficierum A D, & D E, est 2 res, eo quod B D est 2, & quadratum B C est 4, igitur 36 res A B, & 24, equantur cubo A B p: 60, abijce 24 ex utraque parte, erit cubus A B p: 36, æqualis 36 rebus A B, inde cognita A B addemus eam B C, quæ est tp̄q̄d. & conflabitur æstimatio.

Regula.

Regula est igitur. Duc numerum quadratorum in tertiam sui partem, productum adde numero rerum, & conflabitur numerus rerū, hunc duc in tp̄q̄d. & producti sume differentiam ab aggregato ex numero æquationis, & cubo tp̄q̄d. quæ si nulla est, erunt res æq̄les cubo. Si uero productū fuerit maius aggregato, differentia est numerus, qui cū rebus æquatur cubo, & si aggregatū fuerit maius producto, differentia est numerus, qui cum cubo equatur rebus, inde habita æstimatiōe, addes eam tp̄q̄d. & conflabitur uera ęstimatio. Memineris tamen, quod quando capitulum hoc peruenerit ad capitulum cubi æqualis rebus & numero, addenda erit uera æstimatio eius, & ex his quæ fictæ sunt minor, per m: tp̄q̄d: ut habeas utramque æstimationem capituli cubi & numeri æqualis rebus & quadratis, cum capitulum cubi æqualis rebus & numero, unam tantum ueram æstimationem habeat.

Exemplum, Cubus & 64, æqualia sunt 6 quadratis & 24 rebus, duc 6 numerum rerum in 2, tertiam sui partem, fit 12, adde ad 24, fit 36, numerus rerum, quem duc in 2 tp̄q̄d. fit 72, deinde cuba 2 fit 8, adde ad 64, numerum æquationis, fit etiam 72, ideo quia differentia horum numerorum nulla est, habebimus cubum æqualem 36 rebus, quare quadratum æquabitur 36, igitur res est 6, ex capitulo simplici, adde ad 2 tp̄q̄d. fit 8, æstimatio rei. Rursus, cubus & 128, æquetur 6

quadratis & 24 rebus, duc 6 in 2, ut prius, fit 12, adde ad 24, fit 36, numerus rerum, duc 36 in tpq̄d. fit 72, differentia cuius à 136, aggregato 128 numeri æquationis, & 8, cubi tpq̄d. est 64, numerus addendus cubo, quia aggregatum 136, est maius producto 72, quare cubus & 64, æqualia erunt 36 rebus, æstimationes autem sunt 2, & R 33 m: 1, quas adde ad 2 tpq̄d, fiunt ueræ æstimationes 4, uel R 33 p: 1. Rursus, sit cubus & 9, æqualis 6 quadratis & 24 rebus, duc, ut prius, 6 in 2, tertiam sui partem, fit 12, quem adde ad 24, numerum rerum, fit 36, numerus rerū, ut prius, deinde duc 36, in 2 tpq̄d. fit 72, differentia cuius à 17 aggregato 8, cubi tpq̄d. & 9 numeri æquationis, est 55, ideo quia productum est maius aggregato, addemus 55 ad res, & habebimus cubum, æqualem 36 rebus p: 55, huius igitur uera æstimatio est, R 17 $\frac{1}{4}$ p: 2 $\frac{1}{2}$, falsa maior est m: 5, & falsa minor m: V: R 27 $\frac{1}{4}$ m: 2 $\frac{1}{2}$, seu ut clarius intelligas, 2 $\frac{1}{2}$ m: R 17 $\frac{1}{4}$, adde igitur hanc æstimationem, & similiter ueram, tpq̄d. quæ est 2, habebis æstimationes quæsitas, alteram 4 $\frac{1}{2}$ p: R 17 $\frac{1}{4}$, reliquam 4 $\frac{1}{2}$ m: R 17 $\frac{1}{4}$.

De cubo rebus & numero, æqualibus quadratis. Caput XXII.

Demonstratio.


It denuo cubus A C, cum 4 rebus, & 16 numero, æqualis 6 quadratis, & B C sit tpq̄d, ut prius, resoluemus igitur cubum A C, qui æqualis est cubo A B, 6 quadratis A B, 12 rebus A B, & cubo B C, qui est 8, & erit hoc totum, cum 4 rebus A C, & 16, æquale 6 q̄dratis A C, quare cū 4 res A C, sint 4 res A B, p: 4 B C & ideo p: 8, erunt cubus A B, p: 6 quadratis A B, p: 16 rebus A B, p: 32, æqualia 6 quadratis A C, 6 aūt q̄drata A C, æqualia sunt, ut demonstratum est, 6 quadratis A B, p: 24 rebus A B, p: 24, igitur cubus A B, & 6 quadrata A B, & 16 res A B, & 32, æqualia sunt, 6 quadratis A B, p: 24 rebus A B, p: 24, abijce ex utraq; parte 6 q̄drata A B, & 16 res, & 24, relinquetur cubus A B, p: 8, æqualis 8 rebus, inde cognita A B, adde ei B C, tpq̄d. & fiet A C cognita, rei æstimatio. Rursus, cubus & 4 res & 1, æquentur 6 quadratis, erunt igitur 6 q̄drata A C, ut prius, 6 quadrata A B, 24 res A B, & 24. At cubus A C, cum 4 rebus A C, p: 1, æqualis est cubo A B, & 6 quadratis A B, & 16 rebus, & 17, quare abiectis communibus, 6 quadratis A B, & 16 rebus A B, & 17, erit reliquum reliquo æquale, scilet cubus, æqualis 8 rebus p: 7, inde cognita A B, habes A C, ut prius, addendo B C tpq̄d.

REGVLA.

Regula igitur eſt, Duc numerum quadratorum in ſui tertiā partem, & à producto minue numerum rerū, quod ſi fieri nequeat, caſus eſt impoſsibilis, in uera æſtimatione, reſiduum itaq; erit numerus rerum, inde multiplica primum numerum rerum in Tpq̄d, & productū adde numero æquationis, huius aggregati & dupli cubi Tpq̄d. differentiā accipe, quæ ſi nulla eſt, habes cubum æqualem rebus ſolum, ſin duplum cubi Tpq̄d. maius eſt, differentia eſt numerus addendus rebus, ſi duplum cubi minus eſt aggregato, differentia eſt numerus addendus cubo, inde ęſtimationi inuentæ adde Tpq̄d. ut habeas æſtimationem ueram.

Exemplum, cubus & 4 res & 8, æquantur 6 quadratis, duc 6 in 2, tertiam ſui partem, fit 12, abijce 4 fit numerus rerum 8, duc etiam 4 numerum rerum, priorem, in 2 Tpq̄d. fit 8, adde ad 8, numerū æquationis, fit 16, huius & dupli cubi Tpq̄d. quod eſt etiā 16, nulla eſt differentia, quare cubus æquatur 8 rebus, & rei æſtimatio eſt ℞ 8, cui adde 2 Tpq̄d. fiet uera æſtimatio rei, ℞ 8 p: 2. Rurſus, cubus p: 4 rebus p: 16, æqualis ſit 6 quadratis, duco 6 in 2 Tpq̄d. ut prius, fit 12, abijce 4 numerum rerum, fit 8, rerum numerus, duco 4 numerū priorem rerum, in 2 Tpq̄d. fit 8, adde ad 16 numerum æquationis, fit 24, abijce 16, duplum cubi Tpq̄d. relinquitur 8, igitur addemus 8 cubo, quia aggregatum maius eſt duplo cubi Tpq̄d. & fiet cubus p: 8, æqualis 8 rebus, res igitur eſt 2, uel ℞ 5 m: 1, quare addito 2, Tpq̄d. fiet uera ęſtimatio 4, uel ℞ 5 p: 1. Rurſus, cubus & 4 res & 1, æquentur 6 quadratis, eruntq́; ut prius, 8 res, & ducto numero rerum priore, qui eſt 4, in 2 Tpq̄d. fit 8, addito 1, numero ęquationis, fit 9, duplum cubi Tpq̄d. eſt 16, differentia eſt 7, & quia duplū cubi maius eſt aggregato, erūt 8 res, & 7, æqualia cubo, quare res ualet ℞ $7\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, uel in æquatione falſa, minor æſtimatio erit 1 m: adde 2 Tpq̄d. cuiuis, habebis duas ueras æſtimationes, ſcilicet 1, & ℞ $7\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$.

Memineris autem eius, quod diximus in præcedenti capitulo, etiam hic, quod cum peruenerit æquatio ad cubum æqualem rebus tantum, quia falſa æſtimatio à uera non differt in numero, ideo pro ſecunda æſtimatione, quia nihil additur, nec p: nec m: Tpq̄d. ideo ipſa Tpq̄d, erit æſtimatio uera, in utroq;, ut hic æſtimatio cubi & 4 rerum & 8, æqualium 6 quadratis, erit ℞ 8 p: 2, uel 2, & in præcedente capitulo, æſtimatio cubi & 64, æqualium 6 quadratis & 24 rebus, erit 8 ut dictum eſt, & etiam eſt 2, Tpq̄d. ſcilicet, & hoc, quia omnes additiones & detractiones, ex tertia parte numeri quadratorum fieri debent.

De

De cubo quadratis & numero, æqualibus rebus. Caput XXIII.

DEMONSTRATIO.



It etiam cubus, 6 quadrata, & 4, æqualia 41 rebus, & sit cubus A B, cui addam B C tp̃q̃d. eritq́; A C cubus, æqualis cubo A B, 6 quadratis, 12 rebus, & 8, loco cubi A B 6 quadratorum, & 4, ponantur 41 res, his æquales, erit cubus A C æqualis 53 rebus A B, & 4, qui est differentia cubi B C, & 4 numeri equationis primi, ad complendum igitur 53 res A C, addantur 53 B C, eruntq́; cubus A C p: 106, æqualia 53 rebus A C, p: 4, abijce 4 ex utraque parte, erit cubus p: 102, æqualis 53 rebus suis, inde A C æstimatione inuenta, abijce B C tp̃q̃d. relinquetur A B cognita, & est res ipsa.

REGVLA.

Regula igitur est, Duc numerum quadratorum in tertiam sui partem, productum adde numero rerum, fiet numerus rerum secundus, ab hoc minue quadratum tp̃q̃d, & residuum duc in tp̃q̃d. & totum productum adde numero æquationis, & conflabitur numerus, qui cũ cubo æquabitur rebus iam assignatis, inde ab eius estimationibus minue tp̃q̃d. residua sunt quæsitæ æstimationes, ideo sufficiet unum exemplum.

Cubus & 6 quadrata & 12, æquantur 31 rebus, Duc 6 numerũ quadratorum, in 2, sui tertiam partem, fit 12, adde ad 31, fit 43, numerus rerum, ab hoc abijce 4 quadratũ tp̃q̃d. relinquitur 39, quem duc in 2 tp̃q̃d. fit 78, adde ad 12, numerum æquationis, fit 90, igitur cubus p: 90, æquatur 43 rebus, res igitur est 5, uel ℞ $24\frac{1}{4}$ m: $2\frac{1}{2}$, abijce 2 tp̃q̃d. habebis ueras æstimationes 3, uel ℞ $24\frac{1}{4}$ m: $4\frac{1}{2}$, & in ijs ambabus, uerũ est, quod cubus & 6 quadrata & 12, æquantur 31 rebus. Memineris igitur quod omnes horum capitulorum æstimationes, habentur, addendo semper ueras & fictas æstimationes capitulorum in quo resoluuntur tp̃q̃d, & dummodo numerus relinquat̃, etiam id quod additur sit m: purum, illud relictum est rei uera æstimatio. possunt etiam resolui in capitula alia quatuor denominationũ, ut liquet.

De 44 capitulis deriuatiuis. Cap. XXIIII.

DEMONSTRATIO.

Sit



It igitur (gratia exempli) cubus quadrati, cum 6 q̄d'q̄dratis, æqualis 100, & ſit cubus q̄drati, corpus A B C D, altitudinem habens A B, erit igitur q̄dratum, quia latus cubi cū corporis A B C D, quod ſupponitur cubus quadrati, manifeſtum eſt igitur, quod ſuperficies A B C D, eſt q̄d'q̄dm, quia iam A B ſupponitur quadratum, ſexcuplum igitur A B C D ſuperficiei, cum A B C D corpore, æq̄le eſt 100, ex ſuppoſito, ponatur igitur A B res, erit igitur corpus A B C D cubus, & ſuperficies A B C D q̄dratum, ſuppoſitum eſt aūt, quod corpus A B C D, cum ſexcuplo A B C D ſuperficiei, ſit æquale 100, igitur cubus A B & 6 quadrata A B, æqualia ſunt 100, quare ex ſuo capitulo A B cognita, at A B in prima interrogatione fuit q̄dratum, igitur æſtimatio quadrati in prima interrogatione, quando cubus quadrati, & 6 q̄d'q̄dta æquantur 100, cognita erit, cum ſit eadem æſtimationi rei in ſecunda quæſtione. At nos uolumus in prima quæſtione rei æſtimationem, res autem eſt ſemper R℞ quadrati, igitur R℞ A B æſtimationis inuentæ per ſecundam quæſtionem, eſt rei æſtimatio in prima quæſtione, ut proponebatur. Eadem ratiōe, ſi poſuerimus cubū quadrati, & 6 cubos, æquales 100, erit corpus A B C D, cubus quadrati, & A B quadratum, cui ſi ponatur aliqua ſuperficies quadrata æqualis, puta E F G, erit ſexcuplum corporis ex E F in E F G, cum corpore A B C D, æquale 100, ponatur modo corpus E F G res, quia igitur E F eſt R℞ A B, ex ſuppoſito erit cubus E F R℞ cubi A B, igitur corpus A B C D, quadratū corporis ex E F in E G, poſito igitur corpore A B C D quadrato, erit cubus E F res, & ſexcuplum eius ſex res, & iam ſexcuplum cubi E F, cum corpore A B C D, æquabatur 100, & non mutantur corpora, ſed manent eadem, & ſexcuplum cubi E F, eſt 6 res, et corpus A B C D quadratum, igitur quadratum & 6 res, æquantur 100, igitur res eſt cognita, ſcilicet cubus E F, ſed cum E F ſit latus cubi cum ſui cubi, igitur E F cognita erit, quæ eſt R℞ cubica, æſtimationis inuentæ. At cum E F ſit res in prima quæſtione, quia eſt R℞ quadrata A B, & A B ſupponitur quadratum, poſito A B C D, corpore cubo quadrati, igitur poſito A B C D corpore cubo quadrati, erit res E F, & nota latus ſcilicet cubicum æſtimationis inuentę per ſecundam quæſtionem, quam uolumus.





Ex hoc manifeſtæ ſunt regulæ capitulorum deriuatiuorum omnium.

nium. ostendimus enim in uniuersum, capitula 16 primitiua composita, & sunt hæc.

Primũ, Quadratũ æq̃le rebus & numero. 2^{m}, res æq̃les q̃d° & numero. 3^{m}, numerus æq̃lis q̃d° & rebus. 4^{m}, cubus æq̃lis rebus & numero. 5^{m}, res æq̃les cubis & numero. 6^{m}, numerus æq̃lis cubo & rebus. 7^{m}, cubus ęq̃lis q̃d' & numero. 8^{m}, q̃d' ęq̃lia cubo & numero. 9^{m}, numerus æq̃lis cubo & q̃d'. 10^{m}, cubus æqualis q̃d' rebus & numero. 11^{m}, q̃d' æq̃lia cubo reb⁹ & numero. 12^{m}, numerus æq̃lis cubo q̃d' & reb⁹. 13^{m}, res æq̃les cubo q̃d' & numero. 14^{m}, cubus & numerus ęq̃les q̃d' & reb⁹. 15^{m}. cubus & res æq̃les q̃d' & numero. 16^{m}, cubus & q̃d' ęq̃lia rebus & numero. Manifestũ est aũt quòd ex his 2^{m}, 5^{m}, 8^{m}, 11^{m}, 13^{m} & 14^{m}, scd'^{m} naturam, habent duas æstimationes, ex toto diuersas, & à diuersis regulis pendentes. Vnde duplicatis his capitalis fiẽt capitula primitiua 22 cõposita, unicuiq; aũt eorum debent̃ duo capitula deriuatiua, alterũ ex natura q̃drati, alterum ex natura cubi, nam etsi deriuatiua sint infinita, in unoquoq; capitulo, omnia tñ reducũtur ad alterum hoꝝ duorum modorum, loquendo de his, de q̃bus potest haberi regula generalis. Igitur manifestũ est, ipsa esse ad unguẽ 44, quanq̃ eñ capitulum rerum æq̃lium q̃dratis & numero, habeat duas æstimationes diuersas, ideo tñ duplicatum dici nõ debet, quia illæ æstimationes una regula simul habent̃, & similiter quamuis capitulũ cubi & rerum æq̃lium q̃dratis & numero, habeat tres æstimationes ueras, non tamẽ hoc est illi propriũ, & mea nihil refert de numero dicere, modo scias, quòd omnia primitiua, habent duo deriuatiua diuersi generis, & quòd capitula primitiua cõposita, ad minus reduci nequeũt quàm 18, igitur cõtracto numero, quantumuis erunt deriuatiua saltẽ 36, nã capitula, rerũ ęq̃lium numero & cubo, & q̃dratorum ęq̃lium cubo & numero, necessario sunt duplicata, manifestum est eñ, quantũ una ęstimatio ab alia differat. Oblato igiť capitulo, ex tribus aut quatuor denominationibus cõstante, si non adsit numerus, primo oẽs denominationes per minorẽ deprime, ita ut minor in numeꝝ euadat, deinde accipe inferiorẽ denominationẽ, & uide si constat capitulũ, ex tribus denominationibus, an minor sit radix maioris q̃drata uel cubica, uel q̃ radix minoris q̃drata, sit ℞ cubica maioris, tunc quæres æstimationẽ in cõsimili capitulo ex 16, deinde eius ęstimationis, accipe talẽ radicẽ, q̃lis est denominatio minor, cõparata ad minorem, una unius ordinis ad reliquã, & ad facilitatẽ. Disposui deriuatiua oĩa, in directo suorũ primitiuoꝝ, in capitulo 2°, etiã constantia ex q̃tuor denominationib⁹, in quibus si bene aduerteris, semper minor denominatio, id est, infe-

rior post numerum, est radix quadrata unius, & R cubica alterius, denominationis eiusdem capituli. Exemplum. Igitur si quis dicat,

1m. Quad'q̃d' p:2 q̃dratis, ęquantur 10, uides quòd eius primitiuũ est quad' & res, æqualia numero, quęre igitur æstimationem q̃dti p:2 rebus, æqualis 10, & est R 11 m:1, & quia res est R quadrata q̃drati, dic quòd æstimatio est R v:R 11 m:1.

2m. Cu'q̃d', p:2 cu', æquatur 10, eius primitiuum est etiam quad' p: rebus, æqualia numero, cum igitur q̃d' & 2 res, æquantur 10, æstimatio rei est R 11 m:1, cum igitur res sit R cubica cubi, minor scilicet denominatio minoris, erit æstimatio quæsita R v:cub' R 11 m:1.

3m. Quadm relati primi, & 2 rel' prima ęquantur 10, uides quòd relatum est R q̃drata, q̃drati relati primi, dic igitur hoc esse deriuatiuum ex genere quadrati, si igitur q̃d' & 2 res, æquantur 10, æstimatio est R 11 m:1, igitur cũ res sit R relata relati, dices quòd æstimatio quæsita, est R relata v:R 11 m:1.

4m. Cubus q̃dti p:3 q̃d'q̃dratis, æqualis est 20, tunc uides, quòd eius primitiuum est cubus & quadrata, æqualia numero, cum igitur cubus & 3 q̃drata æquantur 20, æstimatio rei est 2, & quia quadratum est radix quadrata, q̃d'q̃drati, ideo æstimatio rei erit R 2.

5m. Cubus quadrati p:3 q̃d'q̃dratis, p:10, æquatur 15 quadratis, uides quòd eius primitiuum in tabula, uel ex ratione dicta, est cubus & quadrata & numerus, æqualia rebus, ideo quære æstimationem cubi & 3 q̃d' & 10, æqualium 15 rebus, quæ est 2, & quia res est radix quadrata, quadrati, ideo dices quòd æstimatio erit R 2.

6m. Cubus cubi & 3 cu'q̃dta, & 10, æquantur 15 cubis, dices ut prius, primitiuum esse cubum & quadrata & numerum, æqualia rebus, igitur si cubus & 3 quadrata & 10, æquantur 15 rebus, res est 2, & quia res est R cubica cubi, ideo dicemus quòd æstimatio erit R cubica 2, & quia primitiuum habet duas æstimationes, ut notum est, totidem etiam habebit deriuatiuum, & utriusque R cubica in hoc exemplo & quadrata in præcedenti, satisfaciet, & hoc est generale omnibus deriuatiuis, ut habeant totidem æstimationes, quot sua primitiua.

7m. Sit etiam cubus cubi æqualis 3 cubis quadrati & 16, tunc quia ducta R cubi q̃ti quæ est cubus, in cubũ quadrati, fit cubus cubi, ideo res erit in capitulo deriuatiuo generali, & eius primitiuum erit, cubus æqualis quadratis & numero, si igitur cubus æqualis sit 3 quadratis p:16, æstimatio rei erit 4, quia igitur quadratum minor denominatio in secunda æquatione, est R cub. cubi quadrati, ideo dico, quòd sumenda erit R cub. 4, pro æstimatione. Et ita de alijs.

Et

Et similiter dices, de cubo cubi & cubo, nam potest referri ad rē & cubum, ut enim res est ℞ cubica cubi, sic cubus est ℞ cu: cub cubi. Potest & referri ad quadratū, & cubum quadrati, nam ex utraq; in suam radicem, producitur compar denominatio, nam ex quadrato in rem, fit cubus, & ex cu'q̄drati in cubum, fit cubus cubi, sed prior modus est facilior. 8m.

De capitulis imperfectis & particularibus. Cap. XXV.



Egulæ hæ, dicuntur generales, & hoc duabus de causis, prima, qa modus in se generalis est, quamq; repugnet naturæ æstimationis, ut sit uniuersalis, uelut si quis dicat, omnis numerus productus ex aliquo in se ducto, quadratus est, regula est generalis, nec tamen sequitur, quod per hanc regulam, cognoscam omnem numerum quadratum, quia non licet cognoscere omnem numerum, qui ex alio in se ducto producitur. Dicitur & generalis regula, quia exhaurit æstimationis genus uniuersum, quamq; æstimatio non exhauriat regulam, particulares tamen sunt regulæ, quia non omnem propositam quæstionē per illas soluere posumus.

Cum igitur cubus æqualis est rebus & numero, & ex numero rerum feceris duas partes, ex quarum una in alterius radicem, fiat numerus æquationis, tunc adde quartam partem eius partis, cuius sumenda esset radix, alteri parti, & ℞ aggregati, addito dimidio ℞ partis, cuius assumpsisti radicem, est æstimatio rei. 1a.

Exemplum. Cubus æqualis sit 20 rebus & 32, tunc ex 16 in ℞ 4, fit 32, igitur addo 1 quartam partem 4, ad 16, fit 17, cuius ℞ p: 1, dimidio ℞ 4, est rei æstimatio, quare res est ℞ 17 p: 1.

1 cub. æq̄lis 20 reb⁹ p: 32
16 — 4
℞ 17 p: 1

Cum fuerit cubus æqualis rebus & numero, & inueneris duos numeros, producentes numerum æquationis, quorum unus sit ℞ aggregati, ex altero & numero rerum, ille qui est ℞, est rei æstimatio. 2a.

Exemplum. Cubus æquatur 24 p: 32 rebus, & sunt duo numeri, producentes 24, qui sunt 6 & 4, quorum 6 est ℞ aggregati, ex 32 numero rerum, & 4 alio producente, nam 6 est ℞ 36, igitur 6 est rei æstimatio.

cub⁹ æq̄lis 24 p: 32 reb⁹
6 — 4 — 32
36
6

Cum fuerit cubus æqualis rebus & numero, & ex numero rerum feceris duas partes, ex quarum utraq; in alterius radicem mutuo, fiat dimidium numeri æquationis, radices illarum partium, cōstituunt iunctæ, rei æstimationem. 3a.

Exemplum, Cubus æquetur 10 rebus p: 24, & ex 10 fiunt duæ partes, 9 & 1, ex quarum mutua unius in ℞ alterius multiplicatione fiunt 9 & 3, qui iuncti faciunt 12, dimidiũ 24, igitur radices 9 & 1, quæ sunt 3 & 1, iunctæ, constituunt 4, rei æstimationem.

cubꝰ æq̄lis 10 rebꝰ p: 24
12
9 — 1
3 X 1
12

4ª. Cum fuerit cubus æqualis rebus & numero, & ex numero rerũ feceris tres partes proportionales, ex quarum ductu mediæ in aggregatum, radicum primæ & tertiæ, fiat numerus æquationis, seu ex tertia in ℞ primæ, & primæ in ℞ tertiæ, quod idem est, tunc tale aggregatum dictarum radicum, est rei æstimatio.

Exemplum. Cubus ęquatur 19 rebus p: 30, & ex 19 fiunt tres partes proportionales, 9, 6, 4, ex quarum secunda, quæ est 6 in 5 aggregatum radicum primæ & tertię, fit 30, ideo 5 aggregatum radicum, est rei æstimatio.

cubꝰ æq̄lis 19 rebꝰ p: 30
4 — 6 — 9
2 3
12 — — 18 — 30

5ª. Cum fuerit cubus æqualis rebus & numero, & inueneris duos numeros, quorum aggregatum, ductum in productum unius in alterum, producat tertiam partem numeri æquationis, & quadrata illorũ æqualia fuerint aggregato ex numero rerum, & producto unius in alterum, tunc aggregatum illorum numerorum, est rei æstimatio.

Exemplum. Cubus æquetur 7 rebus p: 90, & 3 & 2 ducti inuicem producunt 6, qui ductus in 5, aggregatum, producit 30, tertiam partem 90, differentia uero 13, aggregati quadratorum, ab ipso 6, producto unius in alterum, est 7, numerus rerum, ideo 5, aggregatum illorum, est rei æstimatio.

cubꝰ æq̄lis 7 rebꝰ p: 90
9 3
4 2 6 — 7 — 13
13 5 / 30

6ª. Cum fuerit cubus æqualis rebus & numero, & inuentus fuerit numerus cubicus, cuius ℞ cubica, ducta in numerum rerum, producat aggregatum ex numero cubico inuento, & numero æquationis, seu illorum differentiam, tunc res p: eadem ℞ cubica, erit communis diuisor cubi, p: eodem numero cubico, & numeri rerum cum numero aggregato, ex numero æquationis, & numero cubo, uel res m: ℞ cubica eadem, erit communis diuisor, cubi m: numero cubo inuento, & numeri rerum m: differentia numeri ęquationis, & numeri cubi inuenti, inde peruenies ad rei æstimationem.

Exemplum. Cubus æquatur 16 rebus p: 21, tunc quia addito

27 numero cubo, ad 21 fit 48, qui producitur ex 3 ℞ cubica 27, in 16 numerum rerũ, ideo dico, quod res p: 3, erit cõmunis diuiſor, addito 27 utricꝫ parti, ſcilicet cubo & 16 rebus p: 21, inde facta diuiſione, habebis quadratum m: 3 rebus p: 9, æqualia 16, quare q̃dratum æq̃bitur 3 rebus p: 7, & res erit ℞ 9 $\frac{1}{4}$, p: 1 $\frac{1}{2}$, Et ſimiliter, ſi dicamus, cubus ęquãt 4 rebus p: 15, hic abiecto 15 ex 27 numero cubo, differentia quæ eſt 12, continet 4, numerum rerum, in 3, radice cubica 27, ideo dico, quod abiecto communi 27, ex utracꝫ parte, fiet cubus m: 27, æqualis 4 rebus m: 12, inde diuiſis ambobus per rem m: 3, communem diuiſorem, fiet quad. p: 3 rebus p: 9, æquale 4, quare æquatio nulla ſequetur, quamuis perueneris ad modum æquandi, in detractione, niſi forſitan aliquando per m: ſyncerum.

cub⁹ æq̃lis	16 reb⁹ p: 21	
3		27
48		48
1 res p: 3		
cub⁹ p: 27	16 res p: 48	

cubus æq̃lis	4 reb⁹ p: 15	
3		27
12		12
1 res p: 3		
cub⁹ m: 27	4 res m: 12	

Cum fuerit cubus æqualis rebus & numero, & ex numero rerum auferatur $\frac{3}{4}$ quadrati rei, & ℞ reſidui addatur, aut minuatur, ex dimidio rei, aggregatum ductum in quadratum reſidui, & reſiduum ductum in quadratum aggregati, producunt numerum æquationis. 7ª.

Exemplum. Cubus æquatur 14 rebus p: 8, & rei æſtimatio eſt 4, cuius q̃dratum eſt 16, huius $\frac{3}{4}$ ſunt 12, abijce ex 14 numero rerum fit 2 reſiduũ, cuius radicem adde, & minue ex 2, dimidio 4, æſtimationis rei, fiunt 2 p: ℞ 2, & 2 m: ℞ 2, dico igit̃ quod ex uno in quadratum alterius mutuo fiunt 8 ſcilicet numerus æquationis.

cubus æqualis 14 rebus p: 8
res 4 quadratum 16
$\frac{3}{4}$ q̃drati 12 — 14 — 2
2 p: ℞ 2 >< 6 p: ℞ 32
2 m: ℞ 2 6 m: ℞ 32
8

Cum fuerit cubus æqualis rebus & numero, & diuiſeris dimidium numeri æquationis, per rei æſtimationem, addideriſcꝫ prouentum numero rerũ, & ab aggregato detraxeris $\frac{3}{4}$ quadrati ipſius rei, ℞ reſidui, addita & detracta, à dimidio æſtimationis, oſtendit partes, ex quarum ductu unius in quadratum alterius mutuo, producitur dimidium numeri æſtimationis. 8ª.

Exemplum. Cubus æquatur 14 rebus p: 8, & æſtimatio eſt 4, diuide 4 dimidium 8, per 4, æſtimationem exit 1, adde ad 14 fit 15, abijce 12, qui ſunt $\frac{3}{4}$ quadrati æſtimationis, relinquitur 3, cuius radicẽ adde ac minue, ex 2 dimidio æſtimatiõis, habebis 2 p: ℞ 3, & 2 m:

℞ 3, ex quorum ductu unius, in quadratum alterius mutuo, fit 4 dimidium numeri æquationis.

cubus æq̃lis 14 rebus p: 8	
1 —— 4 —— 4	
15 —— 12 —— 3	
2 p: ℞ 3	2 m: ℞ 3
7 m: ℞ 48	7 p: ℞ 48
2	2

9ª. Cum fuerint res æquales cubo & numero, & inueneris numerum, qui ductus in ℞ aggregati, ex ipso & numero rerũ, producat numerum æquationis, tunc dimidia eius ℞, addita uel detracta radici differentiæ numeri æquationis, & $\frac{3}{4}$ eiusdem aggregati, constituit rei æstimationem.

Exemplum. Cubus p: 12 æquatur 34 rebus, tunc quia addendo 2 ad 34, productum ex ipso 2, in 6 ℞ 36 aggregati 2, & 34 est 12 numerus æquatiõis, ideo dico, quod si ad 3, dimidiũ radicis 36 addatur uel minuatur ℞ 7 differentiæ 34 numeri æquationis & 27, quod est $\frac{3}{4}$ q̃drati 6, seu talis aggregati, quod consurget rei æstimatio, 3 p: ℞ 7, uel 3 m: ℞ 7.

cub⁹ & 12 æq̃lis 34 rebus
2
36
12 — 2 — 6
34 3
27
7

10ª. Cum fuerint res æquales cubo & numero, & subtraxeris talem numerum ex numero æquationis, ita quod ℞ cuba differentiæ, ducta in numerum rerum, producat numerum detractum, tunc res m: ℞ cubica differentiæ, erit communis diuisor, facta detractione, & hæc regula similis est sextæ, sicut præcedens secundæ.

Exemplum. 16 res æquantur cubo & 21, detracto 48, relinquitur 27, cuius ℞ cubica 3, ducta in 16 numerum rerũ, producit 48, igitur detracto 48, ex utraque parte, fient cubus m: 27, & 16 res m: 48, inde diuisor communis erit res m: 3, & prouenient quadratum & 3 res & 9, æqualia 16, quare quadratum & 3 res, æquabuntur 7, & rei æstimatio erit, ℞ 9$\frac{1}{4}$ m: 1$\frac{1}{2}$.

cubus & 21 æq̃lis 16 reb⁹
48
27 —— 3
48
res m: 3
cub⁹ m: 27 | 16 res m: 48

11ª. Cum fuerint res æquales cubo & numero, & ex numero rerum feceris tres partes proportionales, ex quarum secunda, ducta in differentiam radicum primæ & tertiæ, seu ex ductu primæ in ℞ tertiæ, & tertiæ in ℞ primæ, differentia æqualis fuerit tertiæ parti numeri ęquationis, erit differentia illarum radicum rei æstimatio, & est similis 4ª.

Exemplum. 19 res æquales sunt cubo & 18, cum ex 19 factæ fuerint tres partes proportionales 4, 6, 9, ex quarum media 6 ducta

in

in differentiam radicum 9 & 4, quæ est 1, fiat 6, tertia pars 18 numeri æquationis, ideo dico quòd 1 differentia talium radicum est rei æstimatio.

cub⁹ & 18 æq̃les 19 reb⁹		
9	6	4
3	1	2
6	3	18

Cum fuerint res equales cubo & numero, & cum ℞ cubica numeri æquationis, diuiseris numerum rerum, & de eo quod exit, feceris duas partes, ex quarum ductu unius in quadratum alterius, fiat numerus æquationis, tunc quantitas proportionalis, inter ℞ cubicam numeri æquationis, & partem, quam ducis in q̃dratum alterius, ut fiat æquationis numerus, est rei æstimatio. 12ª.

Exemplum. 18 res æquantur cubo p: 8, diuiso 18 per 2 ℞ cubam 8, exit 9, ex quo fiunt duę partes 8 & 1, ex quarum una quæ est 8, in quadratum alterius quod est 1, fit 8, numerus ęquationis, ideo 4 numerus proportionalis inter 8, partẽ 9, quam duxisti in quadratum 1, alterius partis, & 2 ℞ cubam 8 numeri æquationis, est rei æstimatio.

18 res æquales cubo p: 8
2 ——— 2
9 — 1 — 8 — 4
1 — 8

Cum fuerit cubus & numerus æqualis rebus, & ex tertia parte numeri rerum, feceris duas partes, quæ ductæ in suas radices, producant duos numeros, qui iuncti, æquales sint dimidio numeri æquationis, aggregatum illarum radicum, est rei æstimatio, & est similis tertiæ regulæ. 13ª.

Exemplum. 15 res, æquantur cubo & 18, capio 5, tertiam partem 15, ex quo facio duas partes, 4 & 1, quæ ductæ in suas radices, 2 & 1, producunt 8 & 1, quorum aggregatum 9, est dimidium 18 numeri æquationis, ideo dico, quod 3, aggregatum talium radicum, est rei æstimatio. Et iam scis, etiam ex regula generali, quòd quotiens ex numero rerum possunt fieri duæ partes, quarum una ducta in alterius radicem, producatur numerus æquationis, quòd talis ℞ est rei æstimatio, & quòd hoc potest esse duobus modis, & quomodo cadat in Binomio uel reciso & integris, ideo quamuis essent similes primæ regulę, quia tamen ex capitulo generali, quasi uiolenter in eam rapimur, satis fuerit admonuisse hic.

15 res ęquales cubo p: 18
5
1 — 4
1 — 2 — res 3
1 — 8 — 9 — 9

Cum fuerit numerus æq̃lis cubo & quadratis, & sciueris ex numero quadratorum facere duas partes, ex quarum ductu unius in quadratum 14ª.

dratum alterius, fiat numerus ęquationis, tunc duces partem quę non in ſe ducitur, in aggregatum eius quæ in ſe ducitur, & quartæ partis eius, quæ non in ſe ducitur, producti ℞, detracto dimidio partis, quæ non in ſe ducitur, eſt rei æſtimatio.

Exemplum. Cubus & 20 quadrata, æquantur 72, ex 20 fiunt duæ partes, 18 & 2, & ex una in quadratũ alterius fit 72, nam ex 18 in 4 fit 72, dico, quòd ſi 18, ducatur in $6\frac{1}{2}$ aggregatũ ex 2 reliqua parte, & $4\frac{1}{2}$, quarta parte ipſius 18, fiet 117, cuius ℞, detracto 9, dimidio 18, oſtendit æſtimationem rei ℞ 117 m: 9.

cub⁹ & 20 q̃drata æq̃lia 72
2 18
$4\frac{1}{2}$
2
$6\frac{1}{2}$ — 18 — 117
℞ 117 m: 9

15ª. Cum fuerint quadrata æqualia cubo & numero, & inueneris numerum non minorem quarta parte numeri quadratorum, nec maiorem tertia parte, cum quo diuiſo numero æquationis, proueniat numerus quadratus, cuius radicis dimidium additum numero quadratorum, faciat quadruplum ipſius diuiſoris, tunc æſtimatio rei eſt duplum numeri diuiſoris, p: uel m: radice producti, ex quadruplo diuiſoris, in differentiam numeri rerum, & tripli ipſius diuiſoris.

Exemplum. Cubus p: 48 æquatur 10 quadratis, tunc quia 3, qui non eſt minor quarta parte 10 numeri quadratorum, nec eius tertia parte maior, diuidẽs 48 producit 16, cuius medietas radicis quæ eſt 2, addita ad 10 numerum quadratorum, conſtituit 12, quadruplum diuiſoris 3, ideo dico, quòd ſi duplo diuiſoris quod eſt 6, addatur uel detrahatur ℞ producti, ex 12 quadruplo 3 diuiſoris, in 1, differentiam 10 numeri rerum, & 9, tripli 3, diuiſoris, & eſt tale productum etiam 12, quod conſtituemus utramq; æſtimationem, 6 p: ℞ 12, uel 6 m: ℞ 12.

10 quad. æq̃l. cubo & 48
3 3
4 4 — 16
12 2 — 10 — 12
6 p: ℞ 12 uel 6 m: ℞ 12

Noᵃ. Et ſcias, quòd per capitula cognoſcuntur regulæ & quæſtiones ſuper his formatę cum facilitate, quæ aliàs uix ſoluerentur, ipſæ uero regulæ ſumptæ ſunt ex demonſtrationibus capituli ſexti, & ego non apposui eas, quia intelligenti noſtros libros ſuper Euclidem, ſunt per ſe manifeſtæ, & non intelligens nõ curabit illas, nec quæret, quoniam non ſunt ei neceſſariæ.

16ª. Operæprecium fuerit nunc oſtendere, quòd hæ regulæ non poſſunt eſſe generales, reſpectu æſtimationis, & modus in uno ſufficiet

ad

ad ostendendum in reliquis capitulis. Capiamus igitur capitulū proximius, & de quo magis posset hoc credi, propter multiplicem æstimationem, & sit cubus p: numero, æqualis 7 quadratis, & sit $2\frac{2}{3}$ numerus positus, id est numerus, qui primo cognoscitur in sexto capitulo, regula secūda, erit igitur ex illa regula, rei æstimatio, R 16 p: $2\frac{2}{3}$, q̄re $6\frac{2}{3}$, quare residuū ad numerum q̄dratorū est $\frac{1}{3}$, quare ex demonstratione posita in initio tertij libri, productū $6\frac{2}{3}$, in q̄dratū $\frac{1}{3}$, est numerus fractus, & est $\frac{20}{27}$, & econtra, ducto $\frac{1}{3}$ in q̄dratum $6\frac{2}{3}$, fit fractus numerus etiam, scilicet $14\frac{22}{27}$, quare posito numero quadratorum integro, & æstimatione fractis numeris constituta, numerus æquationis, qui est superatio partium, quæ sunt rationales, quadratorum ad cubum, nunq̄ poterit esse numerus integer, sed talis æquationis numerus producitur ex una parte numeri rerum, in alterius quadratum. Hoc ostenso, Capio cubum & numerum æquales 7 quadratis, manifestum est autem ex demonstratis in septimo super Euclidem, & ex regulis sexti libri, deducendo numerum ad quadratum & cubum, quod maxima productio partiū 7 in quadratum alterius, est $50\frac{22}{27}$, igitur poterit diuidi 7, ut producat numeros integros, per multiplicationem unius partis in quadratum alterius, ab 1 usq; ad 50, & non in fractos, ex demonstratis igitur in integros, at in integris non potest fieri nisi triplex diuisio, ut patet in figura, nec produci plus quàm 6, 20, 36, 48, 50, igitur residui 45 numeri, nullo modo per genus huius æstimationis exhauriri poterunt, particularis igitur est, ac ualde etiam particularis, nec tamen credas, quòd in alijs capitulis, numerus pro Binomij aut recisi altera parte non posit inseruire, ut sæpius in exemplis docuimus.

7			
1	6,	36,	6.
2	5,	50,	20.
3	4,	48,	36.

Cum fuerit cubus ac numerus æqualis rebus, & ex R numeri rerum feceris duas partes, ex quarum ductu primæ in duplum quadrati secundæ, & secundæ in quadratum primæ, fiat numerus æquationis, tunc secunda pars erit rei æstimatio. 17ª.

Exemplum. Cubus & 48, æquantur 25 rebus, tunc quia ex 5, R 25, fiunt partes 3 & 2, ex quarum ductu 2 in 18 duplum quadrati 3, & ex 3 in 4 quadratum 2, fit 48, ideo dico, quod 3 pars, cuius quadratum duplicatur, est rei æstimatio.

cub⁹ & 48 æqualis 25 reb⁹
2 ✕ 3 — 5
4 18
12 —— 36
48

Cum fuerint cubus & quadrata, æqualia numero, & duo numeri differentes in numero æquationis, ducti inuicem, produxerint tan- 18ª.

N tum,

tum, quantum ex cubo ꝑq̄d. in cubum differentiæ ℞ cubicarum talium numerorum, tunc differentia talium ℞ cubicarum, est rei æstimatio, ut in exemplo à latere patet, res enim facilis est.

cubus & 22 $\frac{1}{2}$ q̄d. æq̄l. 98
3375 —— 125 —— 27
98
7 $\frac{1}{2}$ 5 —— 3
2
421 $\frac{7}{8}$ —— 8
3375

Ostendit regulas maiores, quæ sunt omnino singulares.
Capvt XXVI.

P[a]. Vando quadratum quadrati & res, æquantur quadratis & numero, & diuiso numero rerum ac numero æquationis, per numerum quadratorum, dimidium exeuntis ex numero rerum, fuerit radix prouentus numeri æquationis iam diuisi, tunc accipe ℞ numeri primi ęquationis, & ei adde quartam partem numeri quadratorum, & totius accipe radicem uniuersalem, à qua minue ℞ eiusdem quartæ partis numeri quadratorum, residuum est rei æstimatio.

Quęst. Exemplum. Quatuor iniere societatem. Primus posuit quantitatem. Secundus posuit quadratū quadrati decimæ partis primi. Tertius posuit quintuplum quadrati decimæ partis primi. Quartus posuit quinq;, & tantum posuit primus cum secundo, quantum tertius cum quarto, Quæritur quantū quisq; posuerit? Pone quòd primus posuerit 10 res, secundus posuit igitur quadratum quadrati, tertius 5 quadrata, quartus autem ut dictum est, posuit 5. Igitur quadratum quadrati, & 10 res, æquantur 5 quadratis & 5, diuidendo igitur numerum rerum per numerum quadratorum, exiret 2, cuius dimidium esset ℞ 1, qui prouenit diuiso 5 numero æquationis, per 5 numerum quadratorum, igitur accipe ℞ 5 numeri æquationis, cui adde quartam partem numeri quadratorum, & fiet ℞ 5 p: 1 $\frac{1}{4}$, cuius accipe ℞ v: quæ est ℞ v: ℞: 5 p: 1 $\frac{1}{4}$, & ab ea minue quartam partem numeri quadratorum, habebis rei æstimationem ℞ v: ℞ 5 p: 1 $\frac{1}{4}$ m: ℞ 1 $\frac{1}{4}$, & habebunt ut uides.

p[s] ℞ v: ℞ 50000 p: 125 m: ℞ 125
2[s] 17 $\frac{1}{2}$ p: ℞ 500 m: ℞ v: ℞ 612500 p: 781 $\frac{1}{4}$
3[s] 12 $\frac{1}{2}$ p: ℞ 125 m: ℞ v: 78125 p: 156 $\frac{1}{4}$
4[s] 5

2[a]. Eodē modo, ubi q̄d' q̄d[m], æquetur eisdem conditionibus q̄dratis rebus & numero, regula tenebit similis, & in æstimatione erit idem modus, nisi quòd in fine addemus ℞ quartæ partis numeri

qua-

quadratorum, radici uniuersali, quam in præcedente regula detrahebamus, ut in exemplo, si q̄d'q̄d^{m} æquale foret 5 quadratis, 10 rebus & 5 numero, rei æstimatio esset ℞ v: ℞ 5 p: 1 $\frac{1}{4}$, p: ℞ 1 $\frac{1}{4}$.

Et causa in his regulis est, q̊d ℞ q̄d'q̄drati, est q̄dratum, & ℞ 5 q̄dratorum m: 10 rebus p: 5, est ℞ 5 m: ℞ 5 quadratorum, seu m: rebus ℞ 5, igitur quadratum & res ℞ 5, æquantur ℞ 5, & æstimatio est nota, quæ est eadem cum illa, q̄d'q̄d^{ti}, p: 10 rebus, æqualium 5 quadratis & 5, & eadem ratione, si q̄d'q̄dratum æquale est 5 q̄dratis, 10 rebus & 5, erit quadratum æquale rebus ℞ 5 p: ℞ 5, quare nota est res.

Quando quadratum quadrati & quadrata est res, æqualia fuerint cubis & numero, qui sit 2 p: numero quadratorum, fuerintq́ numerus rerum & cuborum idem, & dimidium numeri rerum, radix numeri, tunc duc in se quartam partem numeri rerum, & producto adde 1, & ab hoc minue ℞ aggregati ex quadrato dimidij numeri rerū & unitate, & residui ℞ adde uel minue à quarta parte numeri rerum, quod fiet, erit rei æstimatio. 3^{a}.

Exemplum. Quad'q̄dratum & 34 quadrata & 12 res, æquantur 12 cubis & 36, tunc uides quòd cubi sunt æquales rebus in numero, & dimidium numeri rerum est ℞ 36 numeri, & numerus ipse est 2 p: numero quadratorum, ideo duc 3 quartam partem 12 numeri rerū in se, fit 9, adde 1 pro regula, fit 10, abijce ℞ 37 aggregati ex quadrato dimidij numeri rerum & unitate, fit 10 m: ℞ 37, huius ℞ uniuersalem minue uel adde 3, quartæ parti numeri rerum, habebis æstimationem rei, 3 p: ℞ v: 10 m: ℞ 37, uel 3 m: ℞ v: 10 m: ℞ 37.

Et modus inueniendi tales regulas habetur ex regula magna, unde etiam capitulo huic nomen dedimus, & est, ut soluas aliquam quęstionem simpliciter, deinde per regulam magnam, uel etiam aliam, deinde obseruabis conditiones necessarias, in transitu ex una in aliam, postmodum obserua, quo modo perueneris ad rei æstimationem, & facies regulam nouam hoc modo super capitulum ignotum. 4^{a}.

Exemplum. Fac ex 6 duas partes, ita quòd cubus minoris, & quadratum maioris, & productum ex eadem maiore in 8, hæc tria producta, sint proportionalia, dico peruenies per regulam magnam ad hoc quòd proportio talium partium erit ℞ cub. 8, scilicet 2, quare diuidemus 6, per ℞ cub. 8 p: 1, & exibit rei æstimatio, at sequendo positionem, habebimus 1 q̄d q̄d^{m} p: 24 q̄dratis p: 144, æqualia 8 cub. p: 96 positionibus. Dicemus igitur, quando q̄d'q̄d^{m} & q̄drata & numerus, æquantur cubis & rebus, & potuerimus inuenire numerum aliquem, qui ductus in numerum æquationis, producat numerum cuius ℞ du

6

1 pos: 6 m: 1 pos:

1 cu. | 36 p: 1 q̄d' m: 12 pos: | 48 m: 8 pos:

48 cub. m: 8 q̄d'q̄d. æquales 1296. p: 1 q̄d'q̄d p: 216 q̄d. m: 24 cub. m: 864 pos:

72 cub. p: 864 pos: æquales 9 q̄d'q̄d. p: 216 q̄d. p: 1296

8 cub. p: 96 pos: æquales 1 q̄d'q̄d. p: 24 q̄d. p: 144.

cta per 6, pro regula, producat numerum, qui diuisus per primum numerum, quem multiplicasti, producat numerum quadratorum, tunc si ipsi primo numero iã dicto, quem multiplicasti in numerum æquationis, addas 3 pro regula, & ducto in R radicis numeri quem iam ab initio produxisti, proueniat numerus, qui diuisus per numerum primum inuentum, producat numerum cuborum, & numerus rerum ductus per primum numerum, fuerit quadruplus cubo eius R'R, tunc dico, quòd detracto 1, pro regula à primo numero quem multiplicasti, & residui sumpta R cubica, & ei addita etiam unitate pro regula, & cum aggregato diuisa tali R'R, quod prouenit, est rei æstimatio. Et causa in hoc est, quòd in tali quæstione, numerus q̄d'q̄d^ti, prouenit ex multiplicando, unitate addita, numerus cuborum, ex diuidendo in multiplicandum, p: 4, numerus quadratorum uero, ex sexcuplo quadrati diuidendi, numerus rerum ex quadruplo cubi diuidendi, numerus æquationis est q̄d'q̄drati diuidendi. Diuidendum uoco in hac quæstione 6, multiplicandum autem 8. Exemplum, q̄d'q̄dratum p: 6 quadratis p: 4, æquatur $3\frac{1}{2}$ cubis p: 8 rebus, pone primũ numerum q̄dratum, duc in 4, fiunt 4 q̄drata, huius R est 2 res, duc in 6 ex regula, fiunt 12 res, quas diuide per quadrata, exit quod æquatur 6, igitur 6 quadrata, æquantur 12 rebus, res igitur est 2. Nos autẽ in positione posuimus quadratum, igitur numerus primus seu multiplicandus erit 4, & cum cæteræ conditiones conueniant, quæ dictę sunt, erit 2 numerus diuidendus, quo diuiso per R cub. 3 p: 1, exibit æstimatio rei, & de hoc diximus capitulo sexto.

De transitu capituli particularis in capitulum particulare.
Caput XXVII.

1. It etiam transitus capituli singularis in singulare, hoc modo, cubus, & 2 quadrata, & 56, æquantur 41 rebus, & rei æstimatio una est 3 p: R 2, quæro in eadem æstimatione, cubus cum 7 quadratis, quot rebus æquabitur? & cũ quo nume-

numero: duc differentiam numeri quadratorũ, quæ est 5, in duplum partis, quæ est numerus in æstimatione, scilicet in 6, fit 30, cui adde 41 numerum rerum, fit 71, numerus rerum, deinde duc partes æstimationis in se, fiunt 2 & 9, quorũ productorum differentiam, quæ est 7, duc in 5, differentiam numeri quadratorum, fit 35, quem adde ad 56, quia 3 est maior ℞ 2, fit numerus æquatiõis 91, igitur cubus & 7 quadrata & 91, æquantur 71 rebus, æstimatione existente 3 p: ℞ 2, & ubi ℞ fuisset maior numero, detraxisses 35 à 56 & remansisset numerus 21.

cubꝰ & 2 q̃d. & 56, æq̃l. 41 rebꝰ	
cubus & 7 q̃d	æstimatio rei
5	3 p: ℞ 2
6	9 — 2
30	7
41	5
71 res	35
	56
numerus	91

Dico etiam, quod non licet transire à capitulo in capitulum, stante eodem genere denominationum, & quod æstimatio rei sit eadem, & non rationalis, id est, non numerus integer, aut fractus. Exemplum sit cubus p: 3 rebus, æqualis 10, æstimatio rei est ℞ v: cubica ℞ 26 p: 5 m: ℞ v: cubica ℞ 26 m: 5, dico quòd sub hac æstimatione, non poterit cubus cum aliquibus rebus æquari ulli numero, usq; in infinitũ, nam sit (gratia exempli) cubus p: 9 rebus, ęqualis 18, quia igitur res est eadem, ℞ cubica scilicet dicta, erit cubus idem in utroq; permutatim. Igitur ex tertio libro, cubꝰ p: 9 rebus p: 10, ęquatur cubo p: 3 rebus p: 18, abijcio communem cubum, fient 9 res p: 10, æquales 3 rebus p: 18, igitur 6 res æquantur 8, igitur æstimatio rei est $1\frac{1}{3}$, numerus rationalis, & nõ ℞ cubica dicta, quod est contra suppositum. 2ª.

cub. p: 3 rebꝰ æq̃l. 10	
cub. p: 9 rebꝰ æq̃. 18	

Similiter nec plures cubi cum pluribus rebus, æquabuntur alicui numero, stante eadem æstimatione, patet ex præcedenti, nam diuisis omnibus per numerum cuborum, habebimus, ut prius, cubum & res æquales numero, quod iam ostendi fore impossibile. Eadem ratio igitur militat in omnibus, nam si dixero cubus æquatur 6 rebus p: 2, uel q̃d' q̃dratum æquatur 6 rebus p: 2, dicam igitur in eadem æstimatione cubus aut q̃d' q̃dratum nullis rebus & numero rationalibus æquari potest, dico rationalibus, quia non prohibet, quod assumptis aut rebus aut numero irrationalibus æquatio non sequatur. 3ª.

Et ex hoc sequitur etiam, quòd in cæteris regula tenet denominationibus, ubi æstimatio rei non sit nec numerus rationalis, nec ℞ simplex ex genere mediæ denominationis. Exemplum, 2 cubi & 10, 4ª.

æquantur 1 q̃d'q̃drato & rei, æstimatio non est nec numerus, nec R̷ cubica simplex alicuius numeri rationalis, dico quod q̃d'q̃dratum sub eadem æstimatione, nullis cubis ac numero æquari poterit, patet, quia facta transmutatione, & abiecto q̃d'q̃drato, relinquentur cubi ęquales numero, igitur æstimatio rei, erit necessario R̷ cubica numeri, uel numerus, quod est contra suppositam.

De operationibus radicum Pronicarum seu mixtarum & Allellarum. Cap. XXVIII.

1 IAm ostendimus in superioribus, tres esse species Pronicarum radicum, Minorem, quando radix q̃drata comparatur quadrati sui & suimet aggregato, ipsum autem aggregatum dicetur pronicum minus. Medium, cum cubica radix, comparatur aggregato ex se & suo cubo, ipsum autem aggregatum dicetur Pronicum medium, sed maior radix pronica est, cum radix radicis alicuius numeri, comparatur aggregato ex seipsa & eius numeri, cuius est radix radicis, ipsum autem aggregatum dicetur pronicum maius, ut in exemplo. Pronicum maius 3, est 84, & 3 est radix pronica maior 84. Non contingunt autem his, cum sint uelut anomala uerba in Grammatica, operationes quæ sunt communes, neq; possunt multiplicari, uel diuidi, addi uel minui, sed habent propriã quandam operationem, quæ dicitur transitus.

2 Cum igitur duxeris pronicum minus, in suam R̷ pronicam, productoq; addideris ipsum pronicum, R̷ quadrata aggregati, erit pronicum medium R̷ quadratæ radicis pronicę minoris, ut in exemplo, duco 3 R̷ pronicam minorem 12, in 12, fit 36, addo ei 12, pronicum minus fit 48, huius R̷ (& est R̷ 48) est pronicum mediũ R̷ 3, quæ fuit R̷ pronica minor 12, nam ducta R̷ 3 ad cubum, fit R̷ 27, cui addita ipsa R̷ 3, producit R̷ 48, igitur R̷ 3 est R̷ pronica media R̷ 48, ut propositum est.

3 Cum duxeris pronicum medium in suam R̷ pronicam, producitur pronicum minus quadrati radicis pronicæ mediæ. Exemplũ, duco 3, radicem pronicam mediam 30 in 30 fit 90, pronicum minus 9, quadrati 3, quod fuit R̷ pronica media ipsius 30.

4 Cum pronicum maius in se ducitur, & productum diuiditur per quadratum radicis suæ pronicæ maioris, quod exit, ad cubum eiusdẽ radicis pronicæ, est uelut 1 quadratum p: 2 positionibus p: 1. Exemplum, capio 18 pronicum maius, duco in se fit 324, diuido per 4 quadratum

dratum 2,℞ pronicæ maioris 18,exit 81,quod eſt 1 quadratum p: 2 poſitionibus p: 1,reſpectu 8,cubi 2,eiuſdem radicis pronicæ.

Allellæ dicuntur radices,cum ex multiplicatione mutua duorum 5.
numerorum,in quadratum alterius,duo numeri conſurgunt; uelut capio 2 & 3,ipſi dicuntur radices allellæ 12,& 18,nam ex 2 in 9,fit 18, & ex 3 in 4,fit 12,inueniuntur autem radices hoc modo,duc utrunque eorum in ſe,& diuide productum per reliquum,& ℞ cubicæ prouentus ſunt allellæ. Exemplũ,uolo ℞ allellam 4 & 8,duc 8 in ſe,fit 64,diuide per 4 exit 16,duc etiam 4 in ſe,fit 16,diuide per 8 exit 2,igitur ℞ cubica 16,& ℞ cubica 2, ſunt allellæ 4, & 8, & ita allellæ 6 & 18 ſunt ℞ cubica 54, & ℞ cubica 2.

4	8
16	64
2	16

Ex quo patet,quòd omnes ℞ allellæ,ſunt ℞ cubicæ numerorũ, Cor^m.
ſe habentium in triplicata proportione,in qua ſe habent ſui ſolidi propoſiti priores,& hi ſunt medij proportionales.

Operationes igitur in his,ex hoc ſunt manifeſtę,nam cum inuen- 6.
tæ fuerint,reducentur ad radices cubicas,cum quibus operaberis rurſus,perfecta operatione,reduces ad allellas.

De regula Modi. Caput XXIX.

Dicitur hæc regula (quia modum exhibet fabricandi regulas quotlibet mercaturæ) Modi, utiliſsima magiſtris Arithmeticæ,ut facilioribus quibuſdam inuentis,artẽ docerent,cuius etiam auxilio,maximam ſexti libri partẽ confecimus. Eſt igitur regula hæc,ſolue quamuis quæſtionem propoſitam,modo quo potes,ſeu poſitione,ſeu auxilio ſexti libri,deinde auferes poſitionem,& regulas alias,& ſerua operatiões,quas quâm potes maxime,ad breuitatem redige,& habebis regulam de modo pro omni conſimili quæſtione.

Exemplum,Serici uiridis paſſus 7,& nigri paſſus 3, ueneunt denarijs 72,& eodem precio ſerici uiridis paſſus 2, & nigri paſſus 4, ueneunt denarijs 52,quæritur precium. Pones poſitionem, eſſe æſtimationem unius paſſus ſerici uiridis,igitur 7 paſſus uiridis ueneunt 7 poſitionibus,quare 3 paſ: nigri ueneunt 72 de: m: 7 poſitionibus,& paſſus ualebit $\frac{1}{3}$ horum,ſcilicet 24 de: m: 2 $\frac{1}{3}$ poſitionibus,& 4 paſſus nigri,ualebũt 96 de: m: 9 $\frac{1}{3}$ poſitionibus,at duo paſſus uiridis ualent 2 poſitiones ex ſuppoſito,igitur 2 paſſus ſerici uiridis & 4 nigri ualent de: 96 m: 7 $\frac{1}{3}$ poſitionibus,& hæc eadẽ æſtimabantur 52 de: igitur

tur de:96 m:7 $\frac{1}{3}$ positiõibus, ęquantur 52 de: quare de:44, qui sunt differentia 96, & 52, æquabuntur 7 $\frac{1}{3}$ positionibus, igitur pos: ualet 6 denarios, & tantam ęstimationem passus serici uiridis esse conueniet, quare 7 passus uiridis ueneunt 42 de: & 3 passus nigri reliquis de: ad 72, scilicet de: 30, quare passus unus de: 10, serici igitur utriusq; precium habes. Hucusq; positione operatus es, nunc uenio ad regulam, dicoq́; in talibus diuide passus numerosiores, scilicet 7, & numerum de^ri: scilicet 72, per passus pauciores, scilicet 3, & quod exit, duc per passus positos in secunda positione, correspondentes paucioribus, & à producto numeri passuum, detrahe reliquos passus secundę positionis, & cum residuo diuide precij 2 & producti differentiam, exibit æstimatio passus numeriosioris, in prima positione.

7	3 D 72
2	4 D 52
7 pos:	72 m:7 pos:
	3
	24 m:2 $\frac{1}{3}$ pos:
	4
	96 m: 9 $\frac{1}{3}$ pos:
	2 pos:
	96 m:7 $\frac{1}{3}$ pos:
	52
	44 m:7 $\frac{1}{3}$ pos:
	7 $\frac{1}{3}$
	6

Exemplum, diuide 7 & 72 per 3, exit 2 $\frac{1}{3}$, & 24 duc per 4, fiunt 9 $\frac{1}{3}$, & 96, à 9 $\frac{1}{3}$ abijce 2, à 96 abijce 52, relinquũtur 7 $\frac{1}{3}$, & 44, diuide 44 per 7 $\frac{1}{3}$ exit 6, precium passus unius serici uiridis.

uirid.	nigri	precium
pas: 7	pas: 3	de: 72
pas: 2	pas: 4	de: 52
7 —	3 —	72
2 $\frac{1}{3}$	4	24
9 $\frac{1}{3}$		96
2		52
7 $\frac{1}{3}$ —		44
	6	

Inde ex hoc breuior regula emergit, ut in tertia figura, diuide 4 per 3, scilicet numerum passuũ eiusdem generis serici in duabus petitionibus, exit 1 $\frac{1}{3}$, quem duc in 7, & 72, fiunt 9 $\frac{1}{3}$, & 96, à quibus abijce numeros suprapositos secũdæ positionis, & sunt 2 & 52, directos à directis, relinquuntur 7 $\frac{1}{3}$ & 44, diuide numerum denariorum 44 per 7 $\frac{1}{3}$ numerum passuum, exit 6, precium passus uiridis serici, & ita constitues breuissimam regulam, ex tam longa positionis operatione, unde merito hæc modi regula, mater regularum dici potest.

2 —	4 —	52
7 —	3 —	72
9 $\frac{1}{3}$ —	1 $\frac{1}{3}$ —	96
7 $\frac{1}{3}$ —	6 —	44

De regula Aurea. Caput XXX.

Hæc



Æc regula rerum, quæ in usum ueniunt, maximã partem amplectitur, nam quæstione ad positionem deducta, perfectaq́ue operatione, proximam quærit æstimationem, quæ sic habetur. Primo uenare proximiores integros numeros, maiorem ac minorem, qui æquationi satisfaciunt, quos non difficile erit habere, horum minorem uocabimus primum inuentum, & maiorem secundum inuentum, & differentiam productorum, differentiam maiorem, differentiam uero producti primi & numeri æquationis, differentiam primam, differentiam autem producti secundi & numeri æquationis, secundam differentiã. Diuide igitur differentiam primam, per differentiam maiorem, quod exit, addatur primo inuento, & perficiemus æstimationem imperfectam quam deducemus ad æquationem, scilicet per denominationes æquationis, ut in primo & secundo inuento, & quod producitur, subtrahe à producto secundo, deinde subtrahe æstimationem imperfectam, ab inuento secundo, residuum duc in differentiam secundam habitam, & tale productum diuide per differentiam producti æstimationis imperfectæ, & secundi producti, quod exit, detrahe ex inuento secundo, residuum est æstimatio rei ualde proxima, cui per iteratas operationes semper propinquius licet accedere, idem fiet, ubi ęquatio sit denominatiõis alicuius, ad numerum, ac denominationes, ut in exemplis patebit.

Sit igitur primo, q̃d'q̃dratum & 3 cubi, æqualia 100, uides quòd si res est 2 q̃d'q̃dratum, & 3 cubi sunt 40, & si res est 3, erit q̃d'q̃dratum & 3 cubi 162, igitur inuentum primum est 2, & productum primum 40, & inuentum secundum 3, & productum secundũ 162, & 122, maior differentia, & 60 differentia prima, & 62 differentia secunda, & nota, quòd inuentum primum semper differt unitate ab inuento secundo, aliter non recte es operatus, his cognitis, diuide 60 per 122, exit $\frac{30}{61}$, quod adde ad 2, primum inuentum, fit imperfecta æstimatio $2\frac{30}{61}$, hanc ducito ad q̃d'q̃dratum & tres cubos, fit 85 ferè, subtrahe igitur 85 productum æstimationis imperfectæ, à 162, producto secundo, habebis 77, subtrahe etiam $2\frac{30}{61}$, ex 3 inuento secundo, relinquuntur $\frac{31}{61}$, duc in 62 differentiam secundam, fit $\frac{1922}{61}$, diuide per 77, exit $\frac{1922}{4697}$, detrahe ex 3 inuento secundo, erit æstimatio satis pro-

2 3
40 —— 100 —— 162
60 62
122
$\frac{60}{122}$ | $\frac{30}{61}$ $2\frac{30}{61}$
77 —— 85
62 —— 100 162
$2\frac{30}{61}$ | 3 | $\frac{31}{61}$
$\frac{31}{61}$ | 62 $\frac{1922}{61}$ 77
$\frac{1922}{4697}$ | 3 | $2\frac{2775}{4697}$

proxima q̃d' q̃drati p: 3 cubis æqualium 100, hæc, $2\frac{2775}{4697}$, & si uelles, posses alternatis operationibus quantumlibet propius accedere.

Quòd si quadratum & 20, æquentur 10 rebus, tunc si res esset 7, haberemus quadratum p: 20, æquale rebus $9\frac{6}{7}$, & si res esset 8, haberemus quadratum p: 20, æquale rebus $10\frac{1}{2}$, igitur ut prius, inuentum primum est 7, productum primum $9\frac{6}{7}$, inuentum secundum 8, productum secundum $10\frac{1}{2}$, differentia maior $\frac{9}{14}$, differentia prima $\frac{1}{7}$, differentia secunda $\frac{1}{2}$, diuidemus igitur differentiam primam, per maiorem differentiam, exibit $\frac{2}{9}$, & addemus hoc ad 7, inuentum primum, fiet æstimatio imperfecta $7\frac{2}{9}$, cuius quadratum p: 20, est æquale 9 rebus & $\frac{116}{117}$, ideo quia hoc insensibiliter differt ferè, à 10, numero rerum, ideo non utimur alia operatione, sed dicemus æstimationem propinquam esse $7\frac{2}{9}$.

7 8
$9\frac{6}{7}$ — 10 — $10\frac{1}{2}$
$\frac{1}{7}$ $\frac{1}{2}$
$\frac{2}{9}$ $\frac{9}{14}$
$7\frac{2}{9}$ | $9\frac{116}{117}$

Sit etiam cubus æqualis 6 rebus p: 20, dicemus, si 3 essent res, 6 res & 20 æquarentur $1\frac{11}{27}$ cubi, & si res essent 4, essent 6 res & 20, æq̃les $\frac{11}{16}$ cubi, igitur inuentum primum est 3, & productum primum $1\frac{11}{27}$, inuentum secundum erit 4, productum secundum $\frac{11}{16}$, differentia prima $\frac{11}{27}$, differentia secunda $\frac{5}{16}$, differentia maior $\frac{311}{432}$, cum qua diuide differentiã minorẽ, exit $\frac{176}{311}$, quam adde ad 3, fiet æstimatio imperfecta $3\frac{176}{311}$, sequere æquationem, scilicet assumendo 6 res p: 20, & erunt $\frac{1245186154}{1363938029}$ sui cubi, hoc autem est proximum ad $\frac{31}{34}$, ab hoc detrahemus productum secundum, & relinquẽtur $\frac{61}{271}$ & $\frac{5}{16}$, similiter subtraho $3\frac{176}{311}$, æstimationem imperfectã, à 4 inuento secundo, relinquitur $\frac{135}{311}$, hoc duco in $\frac{5}{16}$ differentiam secundã, ut etiam in primo exemplo, fit $\frac{675}{4976}$, diuide per differentiam producti secundi, & producti æstimationis, & est $\frac{61}{271}$, exit $\frac{182925}{303536}$, detrahe à secundo inuento, ut prius, relinquitur rei æstimatio $3\frac{120611}{303536}$, & hoc est proximum ad $3\frac{201}{506}$, & ideo ad $3\frac{2}{5}$, & 6 res p: 20, sunt $40\frac{2}{5}$, & cubus $3\frac{2}{5}$, est $39\frac{38}{625}$, & si uelles proximius posses operari tertio, sicut primo fecisti, & proculdubio peruenires ad insensibilem differentiam, & ratio hæc uniuersalis est, nec indiget alia regula.

3 4
$1\frac{11}{27}$ — 1 — $\frac{11}{16}$
$\frac{11}{27}$ $\frac{5}{16}$
$\frac{311}{432}$
$\frac{176}{311}$ $3\frac{176}{311}$
$\frac{61}{271}$ — $\frac{31}{34}$ > $\frac{11}{16}$
$\frac{5}{16}$ — 1
$3\frac{176}{311}$ | 4 | $\frac{135}{311}$ $\frac{5}{16}$
$\frac{675}{4976}$ $\frac{61}{271}$ $\frac{305}{506}$ 4 | $3\frac{201}{506}$.

Et similiter operaberis, ubi essent tres denominationes æquales duabus

duabus alijs, aut tribus, ſed cum duplici ingreſſu, uel triplici, potes etiam deducere ad numeros omnia, ut in primo exemplo, & operationes in eo caſu ſunt longe faciliores, uelut ſi dicam q̃d'q̃dratum & 6 q̃drata & 200, æquantur 10 cubis & 12 rebus, erit primũ inuentum 9, & productũ m: 152, differentia quia 10 cubi & 12 res ſuperant q̃d'q̃dratũ 6 q̃d. & 200, & ſecundum inuentum erit 10, & productum ſecundum erit 680 p: quo q̃d'q̃dratum & 6 quadrata & 200, ſuperant 10 cubos & 12 res, & tunc differentia prima, æqualis eſt producto primo, & differentia ſecunda, producto ſecũdo, & maior differentia eſt aggregatum ex utroq;, & tunc ſufficiet pro prima operatione, diuidere ut prius, differentiam primã per differentiam maiorẽ, & quod exit, & eſt $\frac{19}{104}$, addemus primo inuento, & fiet æſtimatio imperfecta $9\frac{19}{304}$, deinde ſi uis proximius accedere, produces hanc æſtimationem ad ſuas denominationes utrinq;, & collige differentiam quæ uocetur A. quam multiplica per differentiam æſtimationis imperfectæ & ſecundi inuenti, & productum diuide denuo per maiorem differentiam, & quod exit, adde aut minue, ſecundum quod oportet, & habebis intentum, & hoc modo liceret etiam operari in ſecundo & tertio exemplo, ſed nos uoluimus declarare utrumq; modum, ad maiorem in occaſionibus facilitatem, idem dic de radicibus extrahendis.

9	10
152 m:	p: 680
$\frac{152}{832}$	832

De regula Magna. Caput XXXI.



HAec regula eſt pro magnis quæſtionibus ſoluendis, & ex ea inuentæ ſunt regulæ auri & argenti conſolandi, Acuit ingenium, & fit per demonſtrationes, exigitq; hominem expertum, doceturq; per quæſtiones, quoniam eſt multiformis, Et fundamentum regulæ eſt commutatio.

QVAESTIO I.

Fac de 8 duas partes, ex quarum cubis inuicem ductis, fiat 16. Dices igitur, ex una in aliam fiet ℞ cubica 16, diuide 8 in duas partes, ex quarum ductu inuicem fiat ℞ cubica 16, & erunt 4 p: ℞ v: 16 m: ℞ cubica 16, & 4 m: ℞ v: 16 m: ℞ cubica 16.

QVAESTIO II.

Fac de 8 tres partes proportionales, quarum quadratum primæ ſit æquale reliquis, igitur fient primæ duæ partes, quarum unius quadratum, ſit æquale alteri, deinde maiorem diuidemus in duas partes

exiſtentes in continua proportione cum minore, & erunt.

QVÆSTIO III.

Fac ex 8 tres partes proportionales, quarum quadratum maioris, ſit proportionale inter cubū utriuſq; partis, dices igitur, cubus minoris eſt ℞ cubica cubi maioris, & hoc, quia proportio cubi maioris, ad ſuum quadratum, eſt ipſa maior, & hæc eadem eſt quadrati maioris, ad cubum minoris, igitur cubus minoris, eſt ℞ q̄drati maioris, & æqualis ipſi maiori, quare 8 conſtat ex minore & ſuo cubo, igitur 1 cub. p: 1 re, ęqualis eſt 8, & ęſtimatio rei eſt minor pars.

p^a ℞ $8\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$
2^a ℞ v: ℞ $631\frac{1}{4}$ m: $10\frac{3}{8}$ p: $\frac{1}{4}$ m: ℞ $2\frac{1}{16}$
3^a $8\frac{3}{4}$ m: ℞ $18\frac{9}{16}$ m: ℞ v: $631\frac{1}{4}$ m: $10\frac{3}{8}$

QVÆSTIO IIII.

Fac ex 8 duas partes, ita quòd ſeptuplum maioris, ſit proportionale inter quadratum maioris, & cubum minoris, ſit A maior, & C quadratum eius, & B minor, & D cubus eius, ſit etiam E ſeptuplum A, cum igitur ex A in A fiat C, & ex A in 7 E, erit A ad 7, ut C ad E, quare ex 11^a 5^i, ut E ad D, igitur ex A in D, fit ſeptuplum E, at E eſt ſeptuplum A, igitur ex A in D, fit 49 A, igitur D eſt 49, quadratum 7, quare cubus B minoris eſt 49, & B eſt ℞ cubica 49, & A reſiduum.

	8	
A	7	B
C	E	D

QVÆSTIO V.

Fac ex 8 duas partes, ita quòd ſeptuplum maioris, ſit proportionale, inter cubum maioris & quadratum minoris, ſit A maior, & C cubus A, & B minor, & D quadratum B, & E productum ex 7 in A, quia igitur ex A in quadratum A, fit C, & in 7, fit E, erit quadrati A ad 7, ut C ad E, quare ut E ad D, proportio autem quadrati A, ad quadratum B, componitur ex proportione quadrati A ad 7, & 7 ad quadratum B, quare ex proportione E ad D, & 7 ad quadratum B, ſed D eſt quadratum B, igitur proportio quadrati A ad quadratum B, componitur ex proportione ſeptupli A, & eſt E ad D, & 7 ad ipſum D, proportio igitur quadrati A ad D, componitur ex proportione E ad D, & 7 ad D, igitur ex regula ſex quantitatum, ſeu ex proportionū compoſitione, ex 7 in E, fit quadratum A in D, ſed E eſt ſeptuplum A, igitur ex 49 in A, fit quadratum A in D, igitur ex A in D, ſeu in quadratum B, fit 49, quare ex capitulo cubi & numeri æqualium quadratis, B eſt ℞ $7\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, & A $7\frac{1}{2}$ m: ℞ $7\frac{1}{4}$.

	8	
A	7	B
C	E	D

QVÆSTIO VI.

Fac ex 8 duas partes, quarū productū totius in minorē, ſit proportionale inter producta maioris in totum, & maioris in minorem, quia igitur

igitur minor ducitur in maiorem, & totum erit illorum productorũ proportio,ut totius ad maiorẽ,item quia totum ducitur in maiorẽ & minorẽ,erit productorum,ut maioris ad minorẽ, ſed producta ſunt proportionalia,igitur ex 11^{a} 5^{i} elementorum,totius ad maiorem partem,ut maioris ad minorem,igitur 8 diuiſum erit ſecundum proportionem habentem medium & duo extrema,quare partes ſunt manifeſtæ,℞ 80 m:4 & 12 m:80.

QVÆSTIO VII.

Fac de 8 duas partes,ita quod productum maioris in minorem, ſit proportionale inter quadratum minoris & decuplum eiuſdem minoris,dices igitur,quia minor eſt illa,quæ multiplicatur in ſe,in maiorem,& in 10,quod maior eſt proportionalis inter minorem & 10, igitur quadratum maioris,æquatur decuplo minoris,& res nota eſt, nã maior erit ℞ 105 m:5,& minor 13 m:℞ 105.

QVÆSTIO VIII.

Fac de 8 duas partes,quarum quadratum maioris ſit proportionale inter quadratum minoris,& productum ex toto in maiorem,pone maiorem A,& B minorem,quia igitur quod fit ex 8 in A,proportionale eſt inter 64 & quadratum A,ex demonſtratis in ſecundo ſuper Euclidem, erit 64 quarta quantitas proportionalis,cum illis tribus productis,quare 64 ad quadratum A,ut quadrati A ad quadratũ B duplicata, igitur 8 ad A,ut A ad B duplicata,ex 17^{a} 6^{i} elementorum, nam utraq; eſt media proportionum ſuorum quadratorum,quare cubus A æqualis eſt producto ex 8 in quadratum B,hoc enim in ſeptimo libro demonſtratum eſt,quare ponemus A quadratum,erit cubus eius, cubus quadrati ℞ A,quæ ſit C,igitur quadratum B,eſt æquale $\frac{1}{8}$ quadrati cubi C,igitur B eſt,℞ $\frac{1}{8}$ quadrati cubi C, quare cum ℞ cubi quadrati ſit cubus, erit B æqualis cubi C parti ℞ $\frac{1}{8}$,& cum A ſit quadratum C, erit 1 q̃dratum p:cub. ℞ $\frac{1}{8}$, æquale 8,& ideo multiplicando omnia per ℞ 8, erit cubus p:q̃d' ℞ 8,æqualis ℞ 512,ſolue igitur per capitulum 15^{m}, ut in numeris rationalibus operando per regulas tertij libri.

8
C A B

QVÆSTIO IX.

Fac ex 8 tres partes proportionales, quarum aggregatum primæ & ſecundæ,& aggregatum ſecundæ & tertię,& ipſum 8,ſint proportionalia,dico,inuenies primo proportionem illarum quantitatũ proportionalium,quarum aggregatum ſecundæ & tertiæ,eſt proportionale inter aggregatum primę & ſecundæ, & aggregatum omniũ, ſint igitur tales quantitates A B C,& quia proportio A B C,ad B C,eſt ut

A B C D

B C, ad A B, ex ſuppoſito quæſtionis, & B C ad A B, ut C ad B, ex 12ª quinti elementorum, erit A B C, ad B C, ut B ad C ex 11ª eiuſdem, ſed ex proportione in B fit C, igitur ex proportione in B C, fit, A B C, ſit igitur, ut ex proportione in C fiat D, cum igitur ex proportione in B fiat C, & ex eadem in C fiat D, igitur ex proportione in B C fit C D, & ex eadem in B C fiebat etiam A B C, igitur A B C, æquatur C D, abiecto autem C relinquetur A B, æqualis D, eſt autem D quarta quantitas proportionalis, igitur oportebit inuenire quatuor quantitates, continue proportionales, quarum quarta ſit æqualis duabus primis, poſita igitur pª 1, 2ª 1 re, 3ª 1 quadratū, 4ª 1 cub. erit cubus æqualis 1 rei p: 1, & nota eſt ex capitulo, quantitas rei, quę eſt proportio, diuides igitur 8 in quatuor quantitates ſub ea proportione continuatas, ut in ſexto libro docetur, ſoluimus & aliter hanc quæſtionem in quarto libro.

QVÆSTIO X.

Fac ex 8 duas partes, quarum ſeptuplum maioris, proportionale ſit inter cubum minoris, & productum maioris in minorem. Sit A minor, eius cubus C B autem maior, & productum B in A ſit E, & ſeptuplum B ſit D, quia igitur ex B in A, fit E, & ex B in 7 fit D, erit A ad 7, ut E ad D, quare A ad 7, ut D ad C, igitur ex A in C, fit ſeptuplum D, ſed D eſt ſeptuplum B, igitur 49 B, æqualia ſunt quadrato quadrati A, igitur B eſt æquale $\frac{1}{49}$ q̄d'q̄drati A, quia igitur A cum B eſt 8, & B eſt $\frac{1}{49}$ q̄d'q̄drati A, igitur A cum $\frac{1}{49}$ q̄d'q̄drati ſui, æquatur 8, quare res & $\frac{1}{49}$ q̄d'q̄drati æquatur 8, igitur q̄d'q̄dratum p: 49 rebus, æquatur 392, & quamuis huius non ſit capitulum generale, pulchrum tamen fuerit hucuſq; perduxiſſe quæſtionem.

	8	
A	B	7
C	D	E

2 Deprehenditur & quandoq; impoſsibilitas eodem modo propoſitarum quæſtionum, ut facile eſt uidere.

De regula æqualis poſitionis. Cap. XXXII.

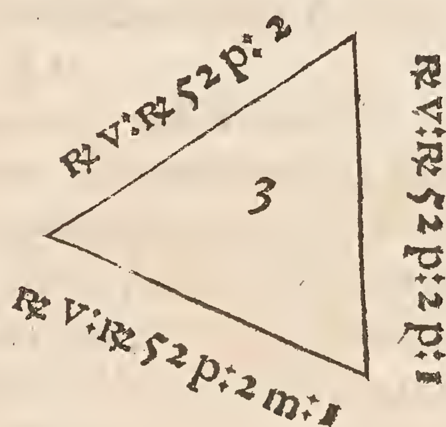
1 

ÆC regula, eſt utilior poſitione ſimplici, in omnibus quæſtionibus, ubi partes æqualiter multiplicantur, ſecus ubi inæqualiter, nam in his ſimplex facilior eſt, ut ſi dicam, diuide 8 in duas partes, quarum una ducta in quadratum alterius, uel in cubum, fiat 20, per ſimplicem poſitionem peruenies ad 8 quadrata m: 1 cubo, æqualia 20, uel ad 8 cub. m: 1 q̄d'q̄drato, æqualia 20 in ſecunda quæſtione, ſed ponendo 4 p: 1 poſitione, & 4 m: 1 poſitio-

positione, peruenies ad 16 pos: p: 44, æquales 1 cubo p: 4 quadratis, & in secunda quæstione, ad 128 positiones p: 236, ęqualia 1 q̃d'q̃dra to p: 8 cubis, manifestum est igitur, quàm hęc sint prioribus difficilio res. In positione etiam simplici, inuenimus prima operatione, rei æsti- mationem in æquali differentiam, quæ addita dimidio diuidendi, & detracta, ostendit numeros quæsitos, qui uere sunt æstimatio rei, quanquam posuerimus rem esse differentiam, uoco autẽ positionem sim- plicem, cum dico, diuide 10 in duas partes, producentes 20, tunc po- nimus partem unam rem, aliam 10 m: re, sed ęqualem, cum pono par tem unam 5 p: re, & aliam, 5 m: re, ideo cum simplex iam per se nota sit, de æquali per quæstiones & exempla dicendum erit, cum certe frequentissimus sit eius usus ac utiles.

Qvæstio I.

Est trigonus, cuius laterum diffe- rentia primi ad secundum, est 1, & ite rum secundi ad tertium, est etiam 1, & area est 3, pones secundum igitur posi- tionem, & primum erit positio m: 1, & tertium positio p: 1, sequere trigonorũ regulam, datam in libro sequente, & fiet ℞ $\frac{3}{16}$ q̃d'q̃drati m: $\frac{3}{4}$ q̃drati uniuersali- ter sumpta, æqualis 3, quare $\frac{3}{16}$ q̃d'q̃d^{ti} æquabitur $\frac{3}{4}$ quadrati p: 9, ideoque 1 q̃d' q̃dratum, æquatur 4 quadratis p: 48, & res erit per capitulum deriuatiuorum, ℞ V: ℞ 52 p: 2, & hoc est latus secundum, adde igitur, & minue 1, ha- bes reliqua latera, ut in figura uides.



Qvæstio II.

Fac de 10 duas partes, quarum cubi cum quadratis iuncti, faciãt 400, pones primã partem 5 p: 1 posi- tione, & secundam partẽ 5 m: 1 positio ne, sequere proble- ma, reducendo par tes ad cubum, & ad quadratum, colliges tandem cadentibus uicissim partibus, 32 quadrata p: 300, æqualia 400, quare quadratum æqua- bitur 3 $\frac{1}{8}$, & res quæ est differentia, erit ℞ 3 $\frac{1}{8}$, igitur partes sunt 5 p: ℞ 3 $\frac{1}{8}$ & 5 m: 3 $\frac{1}{8}$.

5 p: 1 pos:	25 p: 1 q̃d. p: 10 rebus
	125 p: 15 q̃d. p: 75 rebus p: 1 cu.
5 m: 1 pos:	25 p: 1 q̃d. m: 10 rebus
	125 p: 15 q̃d. m: 75 rebꝰ m: 1 cu.
	300 p: 32 q̃d. æqualia 400

QVÆSTIO III.

Fac ex 6 duas partes, quarum quadratorum aggregatum, sit æquale differentiæ cuborum. Pones maiorem 3 p: 1 positione, & minorem 3 m: 1 positione, sequere quæstionem, habebis aggregatum quadratorum, 2 quadrata p: 18, & differentiam cuborum 2 cubos p: 54 positionibus, &

3 p: 1 pos:	9 p: 1 q̃d. p: 6 rebus
3 m: 1 pos:	9 p: 1 q̃d. m: 6 rebus
	18 p: 2 q̃d. aggregatum
3 p: 1 pos:	27 p: 9 q̃d. p: 27 pos: p: 1 cub.
3 m: 1 pos:	27 p: 9 q̃d. m: 27 pos: m: 1 cu.
	differentia 54 pos: p: 2 cu.

hæc æquantur inuicem, igitur cubus & 27 positiones æquatur quadrato & 9, sequere capitulum, fiet rei æstimatio, id est differentiæ, R v: cubica R 702 $\frac{1}{3}$ p: $\frac{1}{27}$ m: R v: cubica R 702 $\frac{1}{3}$ m: $\frac{1}{27}$ p: $\frac{1}{3}$, quare partes erunt, 3 $\frac{1}{3}$ p: R v: cubica R 702 $\frac{1}{3}$ p: $\frac{1}{27}$ m: R v: R 702 $\frac{1}{3}$ m: $\frac{1}{27}$, & minor, 2 $\frac{2}{3}$ p: R v: cubica R 702 $\frac{1}{3}$ m: $\frac{1}{27}$ m: R v: cubica R 702 $\frac{1}{3}$ p: $\frac{1}{27}$.

QVÆSTIO IIII.

Fac ex 8 duas partes, quarum productum maioris in minorem, proportionale sit, inter nonuplum maioris, & ipsam minorem. Pone partem primam 4 p: 1 positione, & minorē 4 m: 1 positione, sequere propositũ, habebis productum maioris, in 9, esse 36 p: 9 positionibus, & maioris in minorem 16 m: 1 quadrato, & minorem 4 m: 1 positione, & hæc sunt proportionalia, igitur ducto 36 p: 9 positionibus, in

9		4 m: 1 pos:
4 p: 1 pos:		
36 p: 9 pos:	16 m: 1 q̃.	4 m: 1 pos:
	256 p: 1 q̃d'q̃d m: 32 q̃d	
	144 m: 9 q̃d.	
	112 p: 1 q̃d'q̃d. æq̃l. 23 q̃d.	

4 m: 1 positione, fit quadratũ 16 m: 1 quadrato, ducito igitur inuicē 36 p: 9 positionibus, & 4 m: 1 positione, & cadent positiones propter mutuam proportionem, quare producetur, 144 m: 9 quadratis, & hoc est æquale quadrato 16 m: 1 quadrato, quod est, 256 p: 1 q̃d'q̃drato m: 32 quadratis, quare reddendo m: parti aduersæ, 112 p: 1 q̃d'q̃drato, æquabuntur 23 quadratis, habebis æstimationem rei, R v: 11 $\frac{1}{2}$ m: R 20 $\frac{1}{4}$, id est R 7, quam adde & minue à 4, erunt partes quæsitæ, 4 p: R 7, & 4 m: R 7, & quamuis potuisses soluere per simplicem, ueniens ad capitulum cubi & rerum, æqualium quadratis & numero, fuisset tamen negocium inexplicabilius, sine ulla comparatione, nam plusq̃ decem alijs indiges operationibus, anteq̃ peruenias ad ueram æstimationem, quæ semper est in natura Binomij, uel recisi ueri, non improprij.

QVÆ-

QVÆSTIO V.

Diuide 10 in duas partes, quarum quadrato primæ detracto ex 100, & quadrato secundæ detracto ex 97, residuorum ℞ iunctæ, constituant 17. Si libet ad uitandū laborem, primo uidebis uia tentatiua, an casus possibilis sit, hoc igitur cognito, pone primum partem 5 p: 1 positione, & reliquam 5 m: 1 positione, duc partes in se, & quadratū maius detrahe ex 100, & minus ex 97, habebis residua, ut in figura, quorum ℞ iunctæ, debent æquari 17, igitur 17 m: una illarum radicum æquatur reliquæ, quare ducemus in se, 17 m: ℞ v: 75 m: 1 quadrato m: 10 positionibus, & habebimus 364 m: 1 quadrato m: 10 positionibus m: ℞ v: 86700 m: 1156 q̄dratis m: 11560 rebus, æq̄lia quadrato alterius radicis, scilicet 72 m: 1 quadrato p: 10 rebus, abijce similia ex utraq; parte, & radicē uniuersalē solam ex aduerso omniū colloca, ut in quarto libro docuimus, ac in quinto habebis 292 m: 20 reb⁹, æqualia ℞ v: 86700 m: 1156 q̄dratis m: 11560 rebus, quare ducendo denuo partes in se, habebis 86700 m: 1156 q̄dratis m: 11560 positionib⁹, æq̄lia 85264 p: 400 q̄dratis m: 11680 rebus, duc ad æquationem reducendo ad 1 q̄dratū habebis rei æstimationē esse ℞ $\frac{139876}{151321}$ p: $\frac{15}{389}$, sed ℞ $\frac{139876}{151321}$, est $\frac{374}{389}$, igitur additis $\frac{15}{389}$ fient $\frac{389}{389}$, igitur res est 1, & partes 4 & 6.

5 p: 1 pos. 5 m: 1 pos.
25 p: 1 q̄d. p: 10 pos. | 100
25 p: 1 q̄d. m: 10 pos. | 97
75 m: 1 q̄d. m: 10 pos. resid.
72 m: 1 q̄d. p: 10 pos. resid.

17 m: ℞ v: 75 m: 1 q̄d. m: 10 pos.
℞ v: 72 m: 1 q̄d. p: 10 pos.

364 m: 1 q̄d. m: 10 pos. m: ℞ v: 86700 m: 1156 q̄d. m: 11560 pos. 72 m: 1 q̄d. p: 10 pos.

292 m: 20 rebus
℞ v: 86700 m: 1156 q̄d. m: 11560 pos.

86700 m: 1156 q̄d. m: 11560 pos.
85264 p: 400 q̄d. m: 11680 pos.

1436 p: 120 pos. æq̄l. 1556 q̄d.
1556

quad. æq̄l. $\frac{30}{389}$ pos. p: $\frac{359}{389}$

QVÆSTIO VI.

Est etiam, ubi positio æqualis, non soluit omnino quæstionem, & simplex soluit. Exemplum, fac de 8 duas partes, quarum quadratum maioris, sit proportionale inter productum maioris in minorem, & decuplum totius, ut pote 60, posita itaq; maiore 1 positione, habebis 60 & 1 quadratum & 8 positiones m: 1 quadrato proportionalia, quare ducta media in se-

60 | 1 q̄d. | 8 pos. m: 1 q̄d.
1 q̄d'q̄. æq̄. 480 pos. m: 60 quad.

ipſam, habebimus 1 q̃d'q̃dratum, ęquale 480 poſitionibus m: 60 quadratis, deprime, & fiet cubus & 60 res, æqualia 480, & ideo res nota eſt, per poſitionem autem ęqualem, peruenies ad capitulum conſtans ex quinq; denominationibus, poſſet autem ſolui, & per regulam magnam, ſed hoc ad rem nihil pertinet.

De regula inæqualiter ponendi, ſeu proportionis. Caput XXXIII.



Æc regula nos docet, ut poſitis numeris inæqualibus, poſitiones pariter æquales annectamus, ſic ut in multiplicatione, uiciſsim ſimiles excidāt partes. Docebo autem hoc per exempla, quamuis quæſtiones quæ per hāc ſoluuntur, etiam per regulam retro agendi poſitionem, de qua in capitulo quinto dictum eſt, diſſolui poſsint.

QVÆSTIO I.

Exemplum. Sunt duo numeri, quorum differentia eſt 4, & quadratum minoris cum quadrato dimidij maioris, & ℞ aggregati ipſorum quadratorum, conſtituit 110, poſſes hanc retro agendo dicere, igitur 110 componitur ex aggregato quadratorum, & ℞ aggregati, igitur poſito aggregato quadrato, erit 110 æquale quadrato & uni rei, quare res eſt 10, aggregatum 100, ideo facies ex 100 duas partes, quarū duplum ℞ unius, excedat aliam ℞ in 4, & ſolutio clara eſt, uerum hoc modo nos ſic ponemus, ſit primus numerus minor 2 poſitiones, quia pars eſt $\frac{1}{2}$, erit maior 2 poſitiones p: 4, inde accipe partem ſecundi, quę eſt in ſe ducenda, & eſt $\frac{1}{2}$, erit igitur pars multiplicanda 1 poſitio p: 2, & primus numerus ut dictū eſt, 2 poſitiones, hoc habito, poſitum eſt, nō permutata quæſtionis natura, partes numeri ita aptare cum rebus, ut in quadratis res ex toto excidant, ſic igitur facies, conſidera ſecundum numerum in ſe ducendum, qualis pars ſit primi, ut in exemplo, 1 poſitio p: 2, quæ pars eſt 2 poſitionum, inuenies quod eſt $\frac{1}{2}$ p: 2, duc igitur denominatorem & numeratorē fracti in ſe, & producta iunge, & habebis 5, pro diuiſore, deinde duc numeratorem in ſe, & productū in numerum differentiæ, qui eſt 4, fit etiam 4, pro diuidendo, diuide igitur

2 poſ.	2 poſ. p: 4
2 poſ.	1 poſ. p: 2

$\frac{1}{2}$ — $\frac{1}{2}$ — $\frac{1}{1}$ — $\frac{1}{4}$) 5 — 4 — $\frac{4}{5}$

$\frac{1}{2}$ ✕ $\frac{4}{5}$ | $\frac{8}{5}$

2 poſ. m: $\frac{4}{5}$
1 poſ. p: $\frac{8}{5}$

4 q̃d. p: $\frac{16}{25}$ m: $\frac{16}{5}$ poſ.
1 q̃d. p: 2 $\frac{14}{25}$ p: $\frac{16}{5}$ poſ.

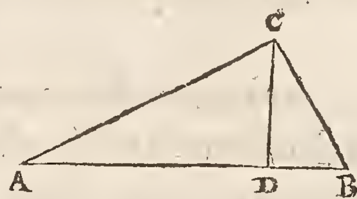
5 q̃d. p: 3 $\frac{1}{5}$

tur

tur 4 per 5, exit $\frac{4}{5}$, hoc auferes ex 2 positionibus, ſcilicet maiore parte, habebis 2 poſ. m: $\frac{4}{5}$, deinde diuide $\frac{4}{5}$ per $\frac{1}{2}$ partem, exit $\frac{8}{5}$, hoc addes ad 1 poſitionem, habebis 1 poſ. p: $\frac{8}{5}$, ecce uides, quoniam habes 2 poſitiones m: $\frac{4}{5}$, & 1 poſitionẽ p: $\frac{8}{5}$, & proportio $\frac{8}{5}$ ad $\frac{4}{5}$, eſt ut 2 poſitiones ad 1 poſitionem, & ſi ſumpſeris duplum maioris, ſcilicet 2 poſ. p: $3\frac{1}{5}$, ſuperabit minorem ſcilicet 2 poſ. m: $\frac{4}{5}$, in 4, ad unguem, hoc peracto, ex regula uniuerſali, duc partes in ſe, habebis 4 quadrata p: $\frac{16}{25}$ m: $\frac{16}{5}$ poſitionibus, & 1 q̃dratum p: $2\frac{14}{25}$ p: $\frac{16}{5}$ poſitionibus, iunge, habebis 5 q̃drata p: $3\frac{1}{5}$, hæc cum radice æquantur 110, igitur R℞ æquatur 110 m: hoc aggregato, igitur $106\frac{4}{5}$ m: 5 quadratis, æquatur R℞ v: 5 quadratis p: $3\frac{1}{5}$, duc partes in ſe, habebis 5 quadrata p: $3\frac{1}{5}$, æqualia $11406\frac{6}{25}$ p: 25 q̃d'q̃dratis m: 1068 q̃dratis, redde reddenda m: alteri parti, & diuide per numerum q̃d'q̃dratorum, qui eſt 25, habebis 1 q̃d'q̃dratum p: $456\frac{76}{625}$, æqualia $42\frac{23}{25}$ q̃dratis, ideo res ualet R℞ v: $21\frac{23}{50}$ m: R℞ $4\frac{1025}{2500}$, ſed R℞ $4\frac{1025}{2500}$ eſt $2\frac{1}{10}$, igitur res eſt R℞ $19\frac{36}{100}$, ſed hæc eſt $4\frac{2}{5}$, igitur res fuit $4\frac{2}{5}$, ſed prima pars ſeu maior, fuit 2 poſitiones m: $\frac{4}{5}$, igitur ipſa fuit 8, & minor fuit 1 poſitio p: $\frac{8}{5}$, igitur fuit 6, & eius duplum fuit 12, qui excedit 8 in 4, & hoc eſt quod uoluimus.

QVÆSTIO II.

Eſt trigonus A B C, cuius baſis A B, eſt 8 p: catheto C D, & A D tripla eſt D B, & quadratum B C cum latere C B, eſt 182, poſita igitur C D re, & A B, re & 8, ſeu C D 4 rebus, & A B 4 rebus p: 8, erit B D res p: 2, & proportio $\frac{1}{4}$, ideo ut prius, duc 4 in ſe, fit 16, duc 1 in ſe, fit 1, iunge, fit 17, diuiſor, inde duc 1 numeratorẽ $\frac{1}{4}$ in ſe, fit 1, duc in 8 differentiam, fit 8, diuide per 17, exit $\frac{8}{17}$, pars minuẽda ex 4 rebus, inde diuide $\frac{8}{17}$ per proportionem quæ eſt $\frac{1}{4}$, exit $\frac{32}{17}$, pars addenda uni rei, erit igitur B D 1 poſitio p: $\frac{32}{17}$, & C D, 4 poſitiones m: $\frac{8}{17}$, duc partes in ſe, habebis quadrata C D & B D pariter accepta, & ex conſequenti, quadratum B C, eſſe 17 q̃drata p: $3\frac{221}{289}$, ſequere ut in præcedente, addendo ei latus B C, eritq́ R℞ v: 17 quadratorum p: $3\frac{221}{289}$ p: 17 q̃dratis p: $3\frac{221}{289}$ æqualis 182, quare $178\frac{68}{289}$ m: 17 q̃dratis æquatur R℞ v: 17 q̃dratorum p: $3\frac{221}{289}$, ſequere igitur operationem, ut prius, habebis rei æſtimationem eſſe $3\frac{2}{17}$, cum igitur B D ſit 1 poſitio p: $\frac{32}{17}$, erit B D 5 & AB



4 poſ. 1 poſ. p: 2

$\frac{1}{4}$ — $\frac{1}{16}$) 17

$\frac{1}{4}$ — 1 — 8 — $\frac{8}{17}$

$\frac{8}{17}$ ╳ $\frac{1}{4}$ $\frac{32}{17}$

4 poſ. m: $\frac{8}{17}$ | 1 poſ. p: $\frac{32}{17}$

16 q̃d. p: $\frac{64}{289}$ m: $\frac{64}{17}$ poſ.

1 q̃d. p: $\frac{1024}{289}$ p: $\frac{64}{17}$ poſ.

17 q̃d. p: $3\frac{221}{289}$

A B 20, quadrupla B D, quare C D, quæ est 8 m: quàm A B, erit 12.

QVÆSTIO III.

Et similiter, si diceret, sunt duo numeri, quorum differentia est 12, & quadratum minoris cum quadrato $\frac{3}{10}$ maioris, & quadrato aggregati, æquatur 1000, tunc ut prius operaberis, ducendo numeratorem ac denominatorem in se, & iungendo, fit diuisor 109, deinde duco 3 numeratorem in se, & productum in 12, fit 108, diuido per 109, habeo partem minuendam ex 10 positionibus, deinde diuido $\frac{108}{109}$, per $\frac{3}{10}$, exit $\frac{360}{109}$, pars addenda 3 positionibus, si igitur 3 positiones p: $\frac{360}{109}$, ducantur in $\frac{10}{3}$, numerus qui producetur, erit 12 p: quàm 10 res m: $\frac{108}{109}$, & talis est proportio $\frac{360}{109}$ ad $\frac{108}{109}$, qualis 10 ad 3, & ideo, quia regula hæc habent infinitos modos, uelut si dicamus, $\frac{1}{2}$ primi & $\frac{1}{3}$ secundi numeri, differentium per 12, in se ducti addita radice, faciunt 100, tunc queres eodem modo suam regulã, per regulam de modo, quia hæc regula est ramus illius, quærendo numeros differentes primo in 12, quorum $\frac{1}{2}$ unius ita diuidatur, in $\frac{1}{2}$ rem & numerum, & reliquus in $\frac{1}{3}$ rei & numerum, ita ut producta rerum sint æqualia. Ponendo unum numerum p: alium m: & inuenitur per capitulum 9^{m}, cum quantitate surda, ut in talibus, ponam regulam exemplo adiunctam, dico quòd si quis dicat.

10 pos. — 3 pos.
$\frac{3}{10}$ — $\frac{9}{100}$) 109
$\frac{3}{10}$ — 9 — 12 — $\frac{108}{109}$
$\frac{108}{109}$ × $\frac{13}{10}$ $\frac{360}{109}$
3 pos. p: $\frac{360}{109}$
10 pos. m: $\frac{108}{109}$

QVÆSTIO IIII.

Inuenias duos numeros, quorum differentia sit 14, & $\frac{1}{3}$ unius in se ductum, cum $\frac{1}{4}$ alterius in se ducto, & cum ℞ aggregati talium productorum, fiat 110, dico primo, duc denominatores in numeratores uicissim, uidelicet 4 in 1, & 3 in 1, & productorũ quæ sunt etiam 4, & 3, iunge quadrata, habebis 25 pro diuisore, deinde duc denominatores inuicem, 3 in 4, fit 12, & quod fit in differentiam quæ fuit 14, fit 168, hoc ducito in productum numeratorũ, quod fuit 1, fit etiã 168, ꝑ diuidendo, diuide igitur 168, per 25, exit $\frac{168}{25}$, hoc multiplica in ipsas partes, uidelicet $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$, habebis 2 $\frac{6}{25}$, addendum, & 1 $\frac{17}{25}$ minuendum, quia semper ut dictũ est, minor pars numeri, minuitur à maiore, & maior additur

$\frac{1}{3}$ × $\frac{1}{4}$ — 1
3 — 4 — 12 — 14 — $\frac{168}{168}$
9 — 16 — 25
2 $\frac{6}{25}$ — $\frac{1}{3}$ > $\frac{168}{25}$
1 $\frac{17}{25}$ — $\frac{1}{4}$
$\frac{1}{3}$ pos. m: 1 $\frac{17}{25}$
$\frac{1}{4}$ pos. p: 2 $\frac{6}{25}$
$\frac{1}{9}$ q̃d. p: 2 $\frac{504}{625}$ m: 1 $\frac{3}{25}$ pos.
$\frac{1}{16}$ q̃d. p: 5 $\frac{11}{625}$ p: 1 $\frac{3}{25}$ pos.
$\frac{25}{144}$ q̃d. p: 7 $\frac{103}{125}$

ditur minori, duc igitur $\frac{1}{3}$ positionis m: 1 $\frac{17}{25}$ in se, & similiter $\frac{1}{4}$ positionis p: 2 $\frac{6}{25}$ in se, & collige pducta, habebis $\frac{25}{144}$ q̄drati p: 7 $\frac{103}{125}$, absq; rebus, quare sequeris operationem, ut in prioribus. Aliud exemplū, in regula parū difficili, inuenias duos numeros differentes in 4, quorum $\frac{3}{4}$ minoris in se ducta, & $\frac{2}{3}$ maioris in se ducta, & aggregato productorū addita radice, fiat 110, duces igitur in crucem, 3 in 3, & 4 in 2, & fient 9 & 8, quorum quadrata iuncta sunt 145, pro diuisore, similiter duces 3 in 4, denominatores, fit 12, duc in 4, differentiā numerorum, fit 48, duc in 6, productum numeratorum, fit 288, pro diuidendo, inde diuiso 288 per 145, exit $\frac{288}{145}$, duc in $\frac{2}{3}$ & in $\frac{3}{4}$, partes acceptas seorsum, habebis $\frac{192}{145}$ & $\frac{216}{145}$, partes addendas ac minuendas ut prius.

$\frac{2}{3}$ X $\frac{3}{4}$ —— 6 | $\frac{288}{145}$
— 12 — 4 — $\frac{48}{288}$
9 — 8
81 — 64 — 145 | $\frac{288}{145}$
$\frac{3}{4}$ pos. p: 1 $\frac{71}{145}$ | $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$
$\frac{3}{4}$ pos. m: 1 $\frac{47}{145}$ | $\frac{192}{145}$ $\frac{216}{145}$

Qvaestio V.

Et similiter dicemus de aggregato, ueluti si dicat, fac ex 10 duas partes, quarum una in se ducta, & alterius dimidio in se ducto, & accepta radice aggregati, totum sit 30, dico operaberis per regulam dictam, in quæstione prima scilicet, quia est de integris ex una parte, inuenies igit̄ numeros 4 & 2, & à maiore minues 1 positionē, & minori addes 2 positiones, & ideo in hoc differt à regulis numerorum differentiū, cætera paria sunt, & ideo sequendo operationē, habebis rei æstimationē, R v: 2 $\frac{1}{10}$ m: R $\frac{121}{100}$, quod est dicere 1, ideo numeri sunt 6 & 4.

$\frac{1}{2}$ — 1
$\frac{1}{1}$ — 1 4) 5 — 10 — 10
$\frac{1}{2}$
10 — 5 — 2
$\frac{2}{1}$ X $\frac{1}{2}$ 4
4 m: 1 pos.
2 p: 2 pos.

De regula medij. Caput XXXIIII.



Hæc sic uocata à me est, quia medium inquiritur, scilicet proportio, & quia ad unitatis confusionem uitandam, ponimus partem unam, dimidium unitatis, & est eius usus solum ad quærendum quantitates, quæ æqualiter multiplicantur, & proportionem seruant, cum autem eam non seruauerint, usus regulæ non est utilis, uerum in duabus quantitatibus solum explicatur, de pluribus autem in capitulo 39° dicemus. Patet aūt, quod si quis dicat, inuenias duos numeros, quorum quadrata iuncta sint 10, & cubi iuncti sint 30, quod regula hæc non seruiet, quia proportio 30 ad 10, quæ est tripla, non seruatur inter cubos & quadratos, 1

uariata quantitate, at regulam ipsam ostendere quemadmodum & alias per exempla utile fuerit.

QVÆSTIO I.

Inuenias duos numeros, quorum differentia ducta in quadratorum differentiam faciat 10, & aggregatum illorum in quadratorum aggregatum, faciat 20. Pones igitur ut dictum est unum illorum, positionem, alium $\frac{1}{2}$ deinde inuenies differentiam, & aggregatum, & quadrata partiū, & differentiā quadratorum, & aggregatum, ut in margine, inde ducito differentiam partium in differentiam quadratorum, & habebis $\frac{1}{8}$ p: 1 cubo m: $\frac{1}{2}$ quadrato m: $\frac{1}{4}$ positionis, & hoc debet esse dimidium producti aggregatorum numerorum scilicet ac quadratorum, quia 10 est dimidium 20, igitur erit dimidium $\frac{1}{8}$ p: 1 cubo p: $\frac{1}{2}$ quadrato p: $\frac{1}{4}$ positionis, quare $\frac{1}{4}$ p: 2 cubis m: 1 quadrato m: $\frac{1}{2}$ positione, æquatur $\frac{1}{8}$ p: 1 cubo p: $\frac{1}{2}$ quadrato p: $\frac{1}{4}$ positionis, igitur reddendo partes m: ad p: erit ut $\frac{1}{8}$ p: 1 cubo, æquetur 1 $\frac{1}{2}$ quadrato p: $\frac{3}{4}$ positionis, quare diuisis partibus, ad faciliorem operationem, quæ semper poterunt diuidi, habebimus 1 $\frac{1}{2}$ positionis, æqualem 1 quadrato m: $\frac{1}{2}$ positione p: $\frac{1}{4}$, diuisor, namq; cōponitur ex partibus ab initio sumptis, scilicet 1 positione & $\frac{1}{2}$, quare 1 quadratum p: $\frac{1}{4}$, æquabitur 2 positionibus, & res erit 1 p: R̷ $\frac{3}{4}$, sunt igitur quantitates in proportione 1 p: R̷ $\frac{3}{4}$, & $\frac{1}{2}$, quare in proportione 2 p: R̷ 3, & 1. Iterum igitur quæramus duas quantitates in hac proportione, quarum aggregatum in aggregatum quadratorum ductum, faciat 20, nam tales necessario habebunt etiam reliquam conditionem, ponemus igitur unam illarum rem, aliam res 2 p: R̷ 3, & quæremus sua quadrata, quæ iungemus, & erunt q̃drata 8 p: R̷

Numeri	1 pos.	$\frac{1}{2}$
Differentia numerorum	1 pos. m: $\frac{1}{2}$	
Aggrega. numerorum	1 pos. p: $\frac{1}{2}$	
Quadrata	1 q̃d.	$\frac{1}{4}$
Differentia q̃dratorum	1 q̃d. m: $\frac{1}{4}$	
Aggregatum q̃drat.	1 q̃d. p: $\frac{1}{4}$	

ꝓductū differen[*] $\frac{1}{8}$ p: 1 cu. m: $\frac{1}{2}$ q̃d. m: $\frac{1}{4}$ pos.
productum q̃drat $\frac{1}{8}$ p: 1 cub. p: $\frac{1}{2}$ q̃d. p: $\frac{1}{4}$ pos.

$\frac{1}{4}$ p: 2 cub. m: 1 q̃d. m: $\frac{1}{2}$ pos.
$\frac{1}{8}$ p: 1 cub. p: $\frac{1}{2}$ q̃d. p: $\frac{1}{4}$ pos.

$\frac{1}{8}$ p: 1 cub. æquatur 1 $\frac{1}{2}$ q̃d. p: $\frac{3}{4}$ pos.

1 pos. p: $\frac{1}{2}$	1 pos. p: $\frac{1}{2}$
1 q̃d. m: $\frac{1}{2}$ pos. p: $\frac{1}{4}$	1 $\frac{1}{2}$ pos.

Numeri	res 1	res 2 p: R̷ 3
Quadrata	q̃d. 1	q̃d. 7 p: R̷ 48
Aggreg. numero.		res 3 p: R̷ 3
Aggreg. q̃d.		q̃d. 8 p: R̷ 48
Productum		cubi 36 p: R̷ 1200

p: R 48, & ducemus in aggregatum numerorum, scilicet res 3 p: R 3, & fiunt cubi 36 p: R 1200, diuidemus igitur 20 per R 1200 p: 36, & exibit $7\frac{1}{2}$ m: R $52\frac{1}{12}$, cuius R cubica erit numerus minor quæsitus, maior autem habebitur, ducto minore in 2 p: R 3, quare numeri quæsiti erunt,

Primus R v: cubica $7\frac{1}{2}$ m: R $52\frac{1}{12}$

Secundus R v: cubica 195 m: R $35437\frac{1}{2}$ p: R 33075 m: R 35490

Qvæstio II.

Inuenias duos numeros, quorũ differentia ducta in differentiam cuborum, producat 10, & aggregatum in aggregatum cuborum constituat 30, hac in quæstione, procedes ut in præcedenti, uerum pones partes 1 positionem & 1, ad facilitatem maiorem, & sequeris ut in præcedenti, donec ueneris ad 1 q̃d'q̃dratum p: 1, æquale 2 cubis p: 2 positionibus, igitur habeo quinque quantitates cõtinue proportionales, quarum aggregatum primæ & quintæ, est duplum aggregato secundæ & quartæ, igitur per capitulum quinque quantitatũ continue proportionalium, quæro proportionem, assumendo puta 2 & 4, quorum 4 est duplus alteri, & faciendo de 4 primam & quintam, & de 2 secundam & quartam, igitur talis proportio erit ut $\frac{1}{2}$ p: R $\frac{3}{4}$ p: R v: R $6\frac{3}{4}$ m: $2\frac{1}{4}$ p: R v: R $\frac{3}{4}$ m: $\frac{3}{4}$, ad unitatem, pones igitur denuo res sub his numeris, uidelicet 1 rem, & res $\frac{1}{2}$ p: R $\frac{3}{4}$ p: R v: R $6\frac{3}{4}$ m: $2\frac{1}{4}$ p: R v: $\frac{3}{4}$ m: $\frac{3}{4}$, inde ducito ad cubum partes per regulas tertij libri, quod non difficile fiet, inde duces res R $\frac{3}{4}$ p: R v: R $6\frac{3}{4}$ m: $2\frac{1}{4}$ p: R v: R $\frac{3}{4}$ m: $\frac{1}{2}$, differentiam scilicet numerorum, in differentiam cuborum, quę habetur detracto 1 cubo, ex cubo dicti iam compositi ex quatuor nominibus, & productũ æquabitur 10, diuides 10 per tale productum & eius quod exit R'R, erit æstimatio primæ quantitatis, qua ducta in $\frac{1}{2}$ p: R $\frac{3}{4}$ p: R v: R $6\frac{3}{4}$ m: $2\frac{1}{4}$ p: R v: R $\frac{3}{4}$ m: $\frac{3}{4}$, consurget secunda quantitas, seu secundus numerus.

Numeri	1 pos.	1
Differentia numer[*]	1 pos. m:	1
Aggregatũ numero.	1 pos. p:	1
Cubi	1 cub.	1
Differentia cuborum	1 cub. m:	1
Aggregatum cuborũ	1 cub. p:	1

Produc. aggregatorum

1 q̃d'q̃d. p: 1 cub. p: 1 pos. p: 1

Productum differentiarum

1 q̃d'q̃d. m: 1 cub. m: 1 pos. p: 1

3 q̃d'q̃d. m: 3 cub. m: 3 pos. p: 3

1 q̃d'q̃d. p: 1 cub. p: 1 pos. p: 1

2 q̃d'q̃d. p: 2 | 4 cub. p: 4 pos.

1 q̃d'q̃d. p: 1 | 2 cub. p: 2 pos.

Qvæstio III.

Inuenias duos numeros quorum relati primi iuncti faciant 20, & aggre-

aggregatum cuborum in aggregatum quadratorum ductum, faciat 25, pones ut in præcedente, partes, 1 positionem & 1, & relati primi earum, sunt $1\ p^{m}\ R^{m}$ & 1, & productum aggregati quadratorum in aggregatum cuborum est, $1\ p^{m}\ R^{m}$ p: 1 cubo p: 1 quadrato p: 1, & hoc se habet ad $1\ p^{m}\ R^{m}$ p: 1. ut 25 ad 20, & ut 5 ad 4, igitur per regulam quantitatum proportionaliū, ducto $1\ p^{o}\ R^{o}$ p: 1 cubo p: 1 q̄drato p: 1, per 4, faciemus quantum ducto $1\ p^{o}\ R^{o}$ p: 1, per 5, igitur $4\ p^{i}\ R^{i}$ p: 4 cubis, p: 4 q̄dratis p: 4, æquantur $5\ p^{is}\ R^{is}$ p: 5, q̄re tandem habebimus $1\ p^{m}\ R^{m}$ p: 1, facta detractione, æquale 4 cubis p: 4 quadratis, diuide partes per positionem p: 1 q̄d'q̄drato m: 1 cubo p: 1 quadrato m: 1 positione p: 1, æqualia 4 quadratis, igitur 1 q̄d'q̄dratum p: 1, æquatur 1 cubo p: 3 q̄dratis p: 1 positione, sunt igitur quinq; quantitates continue proportionales, quarum aggregatum primæ & quintæ, est gratia exempli 10, & aggregatum secundæ & quartæ cum triplo tertiæ etiam 10, igitur nota erit proportio, per capitulū 5 quantitatum continue proportionaliū, & erit $\frac{R\ 3\frac{6}{7}\ m:\ 1\ p:\ R\ v:\ R\ 1\frac{5}{7}\ m:\ \frac{6}{7}}{2\ m:\ R\ 1\frac{5}{7}}$, & hæc est proportio illarum quantitatum, in secunda igitur positione, pones 1 rem, & res in numero supradicto seu proportione, uel reductam proportionem, ut in præcedente quæstione, facta diuisione per numeratorem, ad relatum ducito, per suam regulam, cui adde 1, relatum primum de 1, & cū aggregato diuide 20, & R relata prima, prouentus est numerus minor, inde multiplica ipsum in proportionem, & proueniet maior, & perficere talem operationem est res quasi supra humanum laborem, & nisi essent regulæ tertij libri, uix omnino possibile foret.

1 pos.	1
$1\ p^{m}\ R^{m}$	1
1 cub. p:	1
1 q̄d. p:	1
$1\ p^{m}\ R^{m}$ p: 1 cu: p: 1 q̄d. p: 1	

$5\ R^{i}\ p^{i}$ p:	5
$4\ R^{i}\ p^{i}$ p: 4 cub. p: 4 q̄d. p: 4	
$1\ R^{m}\ p^{m}$ p:	1
æquatur 4 cub. p: 4 q̄d.	

1 pos. p: 1

1 q̄d'q̄d. m: 1 cub. p: 1 q̄d. m: 1 pos. p: 1 4. q̄d.

1 q̄d'q̄d. p: 1 | 1 cu. p: 3 q̄d. p: 1 pos.

De regula aggregati. Caput XXXV.

REGVLA I.

1 Icut ex præcedente, & regula iterata, proportio ipsa quæritur, sic per hanc habemus aggregatum, Est autem utilis ualde, ubi inter partes nulla supponitur proportio. Nam medi-

medium ad quærendum plures numeros simul, est uel proportio, uel aggregatum, aut differentia, cum igitur ex præcedente & regula iterata proportio habeatur, cum hac autem & aggregatũ & differentia, satis cõstat, quanto hæc illas antecedat interuallo. Vocauimus & hãc regulam dupli, quòd duas contineat partes, seu duos numeros quæsitos, ratio uero eius, ut reliquarum, per exempla patet.

QVÆSTIO I.

Inuenias duos numeros, quorum quadrata iuncta sint 20, & productum unius in alterum, cum ipsis numeris, sit 10, dico (quamuis ex sexto libro solui posit) sic per regulam faciemus. Pone aggregatũ 1 positionem, seu rem, & quia ex uno in alterum fit 10, minus aggregato, igitur ex uno in alterũ fiet 10 m: re, fac igitur ex positiõe duas partes, producentes 10 m: 1 positione, & erunt ex regula capituli de operationibus in sexto libro posita, partes, $\frac{1}{2}$ positionis p: ℞ v: $\frac{1}{4}$ quadrati p: 1 positione m: 10, & $\frac{1}{2}$ positionis m: ℞ v: $\frac{1}{4}$ quadrati p: 1 positione m: 10, horum itaq; quadrata iuncta debent esse 20, & quia una pars est Binomium altera recisum respectu $\frac{1}{2}$ positiõis,

$\frac{1}{2}$ pos. p: ℞ v: $\frac{1}{4}$ q̃d. p: 1 pos. m: 10
$\frac{1}{2}$ pos. p: ℞ v: $\frac{1}{4}$ q̃d. p: 1 pos. m: 10
$\frac{1}{4}$ q̃d. p: $\frac{1}{4}$ q̃d. p: 1 pos. m: 10
$\frac{1}{2}$ pos. m: ℞ v: $\frac{1}{4}$ q̃d. p: 1 pos. m: 10
$\frac{1}{2}$ pos. m: ℞ v: $\frac{1}{4}$ q̃d. p: 1 pos. m: 10
$\frac{1}{4}$ q̃d: p: $\frac{1}{4}$ q̃d. p: 1 pos. m: 10
1 q̃d. p: 2 pos. m: 20

sufficiet ducere partes in se, non unam in aliam, ut in libris 3° 4° & 5° docuimus, ideo ducta $\frac{1}{2}$ positio in se, fit $\frac{1}{4}$ quadrati, & ducta ℞ v: $\frac{1}{4}$ q̃drati p: 1 positione m: 10, in se fit $\frac{1}{4}$ quadrati p: 1 positione m: 10, & tantundem ex alia parte, ut in figura, quare quadrata Binomij & recisi iuncta, sunt 1 quadratum p: 2 positionibus m: 20, & hoc æquatur 20, ut dictum est, igitur 1 q̃d. p: 2 positionibus æquatur 40, & rei æstimatio erit ℞ 41 m: 1, fac ex ℞ 41 m: 1 duas partes, quarum q̃drata iuncta sint 20, & erũt per nouam positionem, uel per regulas capituli de operationibus in sexto libro partes quas à latere uides.

p^a ℞ 10 $\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$ p: ℞ v: 10 $\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$
2^a ℞ 10 $\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$ m: ℞ v: 10 $\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$

QVÆSTIO II.

Inuenias duos numeros, qui iuncti faciant tantum, quantum inuicem ducti, & eorum quadrata iuncta sint 20, si igitur aggregatum est 1 positio, productum etiam unius in alterum est 1 positio, fac ex 1 positione duas partes, producentes 1 positionem, per regulas capituli de operationibus in sexto libro positas, seu per quintam secundi elementorum, & erunt partes quas à latere posui, harum igitur quadrata iun

ta iuncta sunt 20, quare cum habeāt ut in præcedenti rationem Binomij & recisi, sufficiet ducere partes unius eorum in se, & duplicare. igitur habebimus pro aggregato quadratorū 1 quadratum m: 2 positionibus, æqualia 20, quare res erit ℞ 21 p: 1, ideo faciemus ex ipsa partes, ut propositum est, & erunt ut uides.

$\frac{1}{4}$ pos. p: ℞ v: $\frac{1}{4}$ q̄d. m: 1 pos.
$\frac{1}{2}$ pos. m: ℞ v: $\frac{1}{4}$ q̄d. m: 1 pos.
$\frac{1}{2}$ q̄d. p: $\frac{1}{2}$ q̄d. m: 2 pos.

℞ 5 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$ p: ℞ v: 4 $\frac{1}{2}$ m: ℞ 5 $\frac{1}{4}$
℞ 5 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$ m: ℞ v: 4 $\frac{1}{2}$ m: ℞ 5 $\frac{1}{4}$

QVÆSTIO III.

Inuenias duos numeros, ex quorum multiplicatione producatur aggregatum, & quadrata ipsorum cum ipsis numeris faciant 20, fac ut in præcedenti, & habebis aggregatum ℞ 20 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, quod est 5, & quia quadrata partium cum ipsis numeris debent æquari 20, igitur quadrata ipsa sola absq; numeris erunt 15, fac igitur ex 5 duas partes, quarum quadrata iuncta sint 15, & habebis numeros quos uides memineris autem, quod in prima operatione, quando perueneris ad 1 quadratum m: 2 positionibus, pro aggregato quadratorum, ut addas 1 positionem, quod est aggregatum numerorum, & peruenies ad 1 quadratum m: 1 positione, æqualia 20.

2 $\frac{1}{2}$ p: ℞ 1 $\frac{1}{4}$
2 $\frac{1}{2}$ m: ℞ 1 $\frac{1}{4}$

QVÆSTIO IIII.

Inuenias duos numeros, qui inuicem ducti producant aggregatum, & diuiso 12 per utrumq;, quadrata prouenientium iuncta cum aggregato diuidentium faciant 80, hæc cū præcedentibus est fratris Lucę, in quodam scripto quod perierat. Pone aggregatum rem unam eam diuide in partes, producentes rem unam, & habebis partes, ut uides, cum quibus diuide 12, ut in figura.

Partes | $\frac{12}{\frac{1}{2}\text{ pos. p: ℞ v: }\frac{1}{4}\text{ q̄d. m: 1 pos.}}$ $\frac{12}{\frac{1}{2}\text{ pos. m: ℞ v: }\frac{1}{4}\text{ q̄d. m: 1 pos.}}$

q̄drata partiū | $\frac{144}{\frac{1}{2}\text{ q̄d. m: 1 pos. p: ℞ v: }\frac{1}{4}\text{ q̄d'q̄d. m: 1 cub.}}$ ✕

✕ $\frac{144}{\frac{1}{2}\text{ q̄d. m: 1 pos. p: ℞ v: }\frac{1}{4}\text{ q̄d'q̄d. m: 1 cub.}}$

Aggregatum q̄dratorum $\frac{144\text{ q̄d. m: 288 pos.}}{1\text{ quad.}}$

Igitur ex partibus ipsis factis quadratis, iunctisq;, ut in quinto libro docui te, habebis aggregatum quadratorum, cui adde aggregatum diuidentium, siquidem rem unam habebis, $\frac{144\text{ q̄d. m: 288 positionib9}}{1\text{ quad.}}$

p: 1

p:1 positione, æqualia 80, multiplica omnia per positionem, fient 144 positiones m:288 p:1 quadrato, ęqualia 80 positionibus, quare q̃dratum & 64 positiones, æquantur 288, res igitur est ℞ 1312 m:32, fac igitur ex ℞ 1312 m:32, duas partes, producentes ℞ 1312 m:32, & illæ erunt numeri quæsiti.

Quæstio v.

Inuenias duos numeros, quorum quadrata iuncta sint 20, & productum unius in alterum, æquale sit q̃drato differentiæ, hæc quamq; clara sit, quoniam necessarie sit eos numeros esse in proportione, quę dicitur habere medium & duo extrema. Posit etiam solui ex regula positionis æqualis, nam plures quæstiones, multis ac diuersis regulis solui possunt. Sic tamen ex hac regula faciemus, posito aggregato re, diuidemus eam in partes, quarũ quadrata iuncta sint 20, & erũt ut uides, igitur quadratum differentiæ est 40, m:1 quadrato, & hoc æquatur producto partium inuicem, quod est $\frac{1}{2}$ quadratum m:10, quare 1 $\frac{1}{2}$ quadratum,

$\frac{1}{2}$ pos. p:℞ v:10 m: $\frac{1}{4}$ quad.
$\frac{1}{2}$ pos. m: ℞ v:10 m: $\frac{1}{4}$ quad.
Differentia ℞ v:40 m:1 q̃d.
Quad. differẽtię 40 m:1 q̃d.
ꝑductum $\frac{1}{2}$ quad. m:10

æquatur 50, igitur res est ℞ 33 $\frac{1}{3}$, ex hoc fac duas partes, quarum q̃drata iuncta sint 20, & erunt ℞ 8 $\frac{1}{3}$, p:℞ 1 $\frac{2}{3}$, & ℞ 8 $\frac{1}{3}$ m:℞ 1 $\frac{2}{3}$. Et ex hac regula deducuntur octo quæstiones, quas ego ob uehementem similitudinem Sorores appellaui, ad capitula melius, quàm alia.

Sequuntur octo quæstiones, quæ uocantur Sorores, q̃rũ ultima sola pro aliarum exemplo declaratur.

Quæstio vi.

Inuenias duos numeros, quorum quadrata iuncta sint 10, & cubi sint 30, pones aggregatum numerorum positionem, & facies partes ex ea, quarum quadrata iuncta sint 10, inde iunge cubos illarum partium, & habebis cubum p:60, æqualia 30 rebus.

Quæstio vii.

Inuenias duos numeros, quorum quadrata iuncta sint 10, & differentia cuborum illorum sit 15, pone aggregatum eorum ut prius, rem, & habebis 1 cub' q̃dratum, æq̃le 300 q̃dratis p:1100.

Quæstio viii.

Inuenias duos numeros, quorum quadrata iuncta sint 10, & ex ductu cuiuslibet eorum in quadratum alterius, producta iuncta faciant 20, pones eodem modo aggregatum numerorum, rem, & habebis 1 cub' q̃dratum p:300 quadratis p:800 positionibus, æqualia 40 q̃d' q̃dratis p:1600.

QVÆSTIO IX.

Inuenias duos numeros, quorum quadrata iuncta ſint 10, & producta unius in alterius quadratum mutuo, differant per 4. Pones ut prius aggregatum, rem, & habebis 1 cub' q̃dratum p: 500 quadratis æqualia 40 q̃d'q̃dratis p: 1936.

QVÆSTIO X.

Inuenias duos numeros, quorum differentia quadratorum ſit 10, & cuborum aggregatum ſit 100. Pones aggregatum numerorum, rem, & facies ex ea partes, quarũ quadrata differant in 10, & eas duces ad cubũ, & habebis 1 q̃d'q̃dratum p: 300, æq̃lia 400 poſitionib9.

QVÆSTIO XI.

Inuenias duos numeros, quorum quadratorum differentia ſit 10, & cuborum differentia ſit 100. Pones ut prius, aggregatum numerorum, rem, & habebis 1 q̃d'q̃dratum p: 33 $\frac{1}{3}$, æqualia 13 $\frac{1}{3}$ cubis.

QVÆSTIO. XII.

Inuenias duos numeros, quorum quadratorũ differentia ſit 10, & aggregatum productorum unius in quadratum alterius mutuo, ſit 100. Pones ut prius aggregatum illorum, rem, & habebis 1 q̃d'q̃dratum æquale 400 rebus p: 100.

QVÆSTIO XIII.

Inuenias duos numeros, quorum quadratorum differentia ſit 10, & differentia productorum unius in alterius quadratorum, ſit 100, hanc explicabo diligenter, ut ſit forma operandi, atq; exemplar in reliquis, non ſolum ſeptem procedentibus, ſed & alĳs multis, quæ formari poſſunt in hoc genere. Ponam igitur illorum aggregatum, rem, & per regulam de modo, uel capituli operationũ in ſexto libro, faciam ex ea duas partes, quarum quadratorũ differentia ſit 10, & eſt, ut diuidas illam differentiã ſcilicet 10, per duplum diuidendi, quod eſt 2 poſitiões, exiens quod eſt $\frac{5}{1\ \text{poſ.}}$, addes & minues dimidio diuidendi, quod eſt $\frac{1}{2}$ poſitio, habebis partes, & quadrata illarum, quę ſuppone permutato ordine ſuis radicibus, ut in figura patet, duces igitur inferiora in ſua ſuperiora, ſufficitq; in his, quorũ uolumus differentiã multiplicare, partes diſsimiles, id eſt quæ in uno ꝓducãt p: in alio m: ſicut in aggregandis ſufficit multiplicare partes ſimiles, nam reliquæ per ſe cadunt, duc

$\frac{1}{2}$ poſ. p: $\frac{5}{1\ \text{poſ.}}$	$\frac{1}{2}$ poſ. m: $\frac{5}{1\ \text{poſ.}}$
$\frac{1}{4}$ q̃d. p: $\frac{25}{1\ \text{q̃d.}}$ m: 5	$\frac{1}{4}$ q̃d. p: $\frac{25}{1\ \text{q̃d.}}$ p: 5
2 $\frac{1}{2}$ poſ. m: 1 $\frac{1}{4}$ poſ. m: $\frac{125}{1\ \text{cu.}}$	1 $\frac{1}{4}$ poſ. m: 2 $\frac{1}{2}$ poſ. p: $\frac{125}{1\ \text{cu.}}$
Differentia 2 $\frac{1}{2}$ poſ. m: $\frac{250}{1\ \text{cu.}}$ æq̃lia 100	
1 q̃d'q̃d. æquale 40 cub. p: 100	

igitur

igitur $\frac{1}{2}$ positiõe in m: 5, & $\frac{5}{1\ Pos.}$ in $\frac{1}{4}$ quadrati p: $\frac{25}{1\ qd.}$, qa ubi una producit p: alia producit m: & detrahe m: à p: & hoc non est aliud, quàm duplicare unum illorum productorum, habebis differentiam unius producti ab altero, $2\frac{1}{2}$ positiones m: $\frac{250}{1\ cu.}$, igitur hoc ęq̃tur 100, diuide omnia per $2\frac{1}{2}$, & multiplica per 1 cubũ, habebis 1 q̃d q̃dratũ æquale 40 cubis p: 100, & ita in aliis, & posses super hoc statuere regulam de modo, dicendo, cũ duo numeri, quorum quadratorũ differentia est constituta ex multiplicatione uicissim in q̃drata, debent producere aliquam differentiam inter ipsa producta, tunc erit q̃d' q̃dratũ æquale q̃drato differentiæ q̃dratorum, & totidem cubis, quotus est numerus, qui prouenit, diuiso numero differentiæ productorum per quartam partem differentiæ q̃dratorum, uelut si dicã, inuenias duos numeros quorum quadratorum differentia sit 6, & productorum unius in quadratum alterius differentia sit 60, dicemus igitur 1 q̃d' q̃dratum æquabitur 40 cubis p: 36, & ita de aliis.

Regula II.

Est & alius modus regulæ aggregati, longe subtilior præcedente, & facit duas positiões simul & duas conuersiones, & nihil est subtilius his in regulis, & inueni ipsum in quodã fragmento fratris Lucę, & tandem reduxi ipsum post multos labores, quia uix poterat legi in hac parte, uel percipi imago huius regulę, & ego explicabo eam faciliter, & nisi esset, quod non est multum generalis hic modus, quantum ad ostendendam æstimationẽ rei, licet quo ad positionẽ sit amplissimus, nihil aliud posset excogitari præstantius, & exemplũ ac regula erit in quæstionibus. 2

Quæstio XIIII.

Inuenias duos numeros, ex quorũ ductu unius in alterũ producatur 8, & q̃drata iuncta cũ ipsis numeris, faciant 40. Pones aggregatũ illorum numerorum $\frac{1}{2}$ quantitatem, & alterum ex illis 1 positionem, reliquus igitur est $\frac{1}{2}$ quantit. m: 1 positione, duc inuicẽ, fiunt $\frac{1}{2}$ quan' pos. m: 1 q̃drato, & hoc æq̃tur 8, igitur habes q̃dratũ p: 8, æq̃le quantitati, cuidam rerum. Sequere igitur capitulum, accipe dimidiũ numeri rerum, id est $\frac{1}{4}$ quantitatis, ut in capitulo quinto doceris, quando q̃dratũ & numerus ęquantur rebus, duc igitur $\frac{1}{4}$ quantitatis in se, fit $\frac{1}{16}$ q̃d' quan: abiice 8, numerũ æq̃tionis, fit $\frac{1}{16}$ q̃d' quan: m: 8, accipe R℞ v: quam adde, ac minue, ad $\frac{1}{4}$ quantitatis, dimidium numeri rerum, fiet rei æstimatio, seu numeri quæsiti, quorum unus est, $\frac{1}{4}$ quantitatis p: R℞ v: $\frac{1}{16}$ quad' quan' m: 8, & alter, $\frac{1}{4}$ quantitatis m: R℞ v: $\frac{1}{16}$ quad' quan' m: 8, horum igitur quadrata, addito aggregato nu-

merorum, id est $\frac{1}{2}$ quantitatis, æquantur 40, quadrata igitur partium, cadentibus uicissim multiplicationibus $\frac{1}{4}$ quantitatis in ℞ v: $\frac{1}{16}$ q̄d' quan: m: 8, quia sunt æqualia, m: & p: erunt $\frac{1}{8}$ q̄d' quan: m: 8, & $\frac{1}{8}$ q̄d' quan: m: 8, iuncta igitur $\frac{1}{4}$ q̄d' quan: m: 16, æqualia cum $\frac{1}{2}$ quantitatis, aggregato numerorũ ad 40, pone igitur pro quantitate rem, erit $\frac{1}{4}$ quadrati p: $\frac{1}{2}$ positione, ęquale 56, igitur 1 quadratum p: 2 positionibus, æquatur 224, quare res ualet ℞ 225 m: 1, id est 14, & tantundẽ ualet quantitas, sed nos posuimus dimidiũ quantitatis aggregatum, igitur aggregatum numeroꝝ est 7, fac ex 7 duas partes, ex quarum ductu inuicem fiat 8, & erunt 3 $\frac{1}{2}$ p: ℞ 4 $\frac{1}{4}$, & 3 $\frac{1}{2}$ m: ℞ 4 $\frac{1}{4}$, numeri quæsiti, quorum quadrata numeris ipsis sunt 40.

$\frac{1}{2}$ quan:
1 pos. | $\frac{1}{2}$ quan: m: 1 pos.
$\frac{1}{2}$ quan: pos. m: 1 q̄d.
æqualis 8
$\frac{1}{4}$ quan:
$\frac{1}{16}$ q̄d. quan: m: 8
$\frac{1}{4}$ q̄n: p. ℞ v: $\frac{1}{16}$ q̄d: q̄n: m: 8
$\frac{1}{4}$ q̄n: m: ℞ v: $\frac{1}{16}$ q̄d. q̄n: m. 8
$\frac{1}{8}$ q̄d. quan: m: 8
$\frac{1}{8}$ q̄d quan: m: 8
$\frac{1}{2}$ quan:
$\frac{1}{4}$ q̄d. q̄n. m: 16 p: $\frac{1}{2}$ quan:
æqualis 40
1 q̄d. quan. p: 2 quan: æq̄lis 224
æstimatio rei ℞ 225 m: 1

Not^m. Et si quis quærat, quid prosit hæc regula, cuíq; possit opitulari præter primam? Respondeo, Prima indiget regula particulari sexti libri in operando, hæc autem libere usq; in finem agit, deducẽdo, quod quàm pulcherrimum ultra id quod utilissimum est, nullo alieno indigere præsidio. Est & aliud exemplum.

QVÆSTIO XV.

Inuenias duos numeros, ex quorum multiplicatione producatur 6, & quorum cubi iuncti faciant 100. Ponemus $\frac{1}{2}$ quantitatẽ pro aggregato, & partem unam rem, alia erit $\frac{1}{2}$ quantitatis m: re, duc partes inuicem, habebis $\frac{1}{2}$ quan' pos: m: 1 quadrato, ęqualia 6, sequere ęquationem tanq; $\frac{1}{2}$ quantitas esset aliquis numerus, & habebis æstimationem, duas æstimationes pos. scilicet, $\frac{1}{4}$ quantitatis p: ℞ v: $\frac{1}{16}$ q̄d' quan: m: 6, & $\frac{1}{4}$ quantitatis m: ℞ v: $\frac{1}{16}$ q̄d' quan: m: 6, horum cubi debent æq̄ri 100, duc ad cubum, dimittendo partes, quæ in uno sunt p: in alio m: habebis $\frac{1}{16}$ cub' quan: m: 4 $\frac{1}{2}$ quantitatibus pro sin-

$\frac{1}{2}$ quan:
1 pos. | $\frac{1}{2}$ quan: m: 1 pos.
$\frac{1}{2}$ quan: pos: m: 1 q̄d.
æqualis 6
$\frac{1}{4}$ quan: p: ℞ v: $\frac{1}{16}$ q̄d. quan: m: 6 | pos.
$\frac{1}{4}$ quan: m: ℞ v: $\frac{1}{16}$ q̄d. quan: m: 6 | pos.
$\frac{1}{16}$ cub. quan: m: 4 $\frac{1}{2}$ quan: | cubus
$\frac{1}{16}$ cub. quan: m: 4 $\frac{1}{2}$ quan: | cubus
$\frac{1}{8}$ cub. quan: m: 9 quan: æq̄lia 100
1 cub. æqualis 72 res p: 800

ſingulis partibus, quare in totũ $\frac{1}{8}$ cub' quan: m: 9 quantitatibus, æqualia 100, permuta cub' quan: in cubum rei, & quantitatem in rem, & reduces ad 1 cubum, habebis cubum, æqualem 72 rebus p: 800, & rei æſtimatio erit æſtimatio quantitatis, ſcilicet ℞ v: cubica 400 p: ℞ 146176 p: ℞ v: cubica 400 m: ℞ 146176, huius igitur dimidium, quod eſt ℞ v: cubica 50 p: ℞ 2284 p: ℞ v: cubica 50 m: ℞ 2284 eſt aggregatum quæſitorum numerorum, & partes ſunt, ℞ v: cubicæ quæſitæ, ſed hoc apparet alia operatione.

Qvæstio xvi.

Inuenias duos numeros, quorum quadratorum differentia ſit 10, & ex maiore illorum iuncto cum ſuis quadratis, fiat 40. Pones aggregatum numerorum rem, & unam partem $\frac{1}{2}$ quantitatem, reliqua erit res m: $\frac{1}{2}$ quantitatis, duc in ſe partes, habebis $\frac{1}{4}$ q̃d' quan: & 1 q̃dratum p: $\frac{1}{4}$ q̃d' quan: m: 1 quan' poſ. ſume differentiam, quæ erit 1 quan' poſ. m: 1 q̃d. & hoc æq̃tur 10, igitur rei æſtimatio eſt $\frac{1}{2}$ quantitas p: ℞ v: $\frac{1}{4}$ q̃d' quan: m: 10, & $\frac{1}{2}$ quantitas m: ℞ v: $\frac{1}{4}$ q̃d' quan: m: 10, horũ quoduis æquatur 1 poſitioni, & iam poſitio diuiſa fuit in $\frac{1}{2}$ quantitatem, & poſitionem m: $\frac{1}{2}$ quantitate, igitur cum $\frac{1}{2}$ quantitas ſit communis utrobiq;, erit ℞ v: $\frac{1}{4}$ q̃d' quan: m: 10, æqualis 1 poſitione m: $\frac{1}{2}$ quantitatis, igitur quadrata partium, quæ ſunt $\frac{1}{4}$ q̃d' quan: & $\frac{1}{4}$ q̃d' quan: m: 10, cum una partium, ſcilicet $\frac{1}{2}$ quantitate, æquantur 40, quare 1 q̃d' quan: p: 1 quantitate, æquatur 100, res igitur quæ eſt quantitas, eſt ℞ 100 $\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$, & quia nos poſuimus $\frac{1}{2}$ quantitatis, erit una pars, ℞ 25 $\frac{1}{16}$ m: $\frac{1}{4}$, dimidium ſcilicet ℞ 100 $\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$, & minor erit ℞ v: 15 $\frac{1}{8}$ m: ℞ 6 $\frac{17}{64}$. Et generaliter in hac regula, qui plus ualet ingenio, plus ualet in operatione, nam modi ſunt complures, & de omnibus dicere longũ foret, iſta igitur ſufficiant, & ad exempla primæ regulæ denuo tranſeamus, Quærentes hoc modo.

1 poſ.
$\frac{1}{2}$ quan: | 1 poſ. m: $\frac{1}{2}$ quan:
$\frac{1}{4}$ q̃d' quan: | 1 q̃d. p: $\frac{1}{4}$
q̃d. quan: m: 1 quan: poſ.

$\frac{1}{2}$ quan: p: ℞ v: $\frac{1}{4}$ q̃d' q̃n: m: 10 | poſ.
$\frac{1}{2}$ quan: m: ℞ v: $\frac{1}{4}$ q̃d' q̃n: m: 10 | poſ.
$\frac{1}{4}$ q̃d' quan: | $\frac{1}{4}$ q̃d' q̃n: m: 10 | $\frac{1}{2}$ quan:
1 q̃d' quan: p: 1 quan: æquantur 100

Qvæstio xvii.

Inuenias duos numeros, quorum quadratum ſecundi, æquale ſit ductui primi in aggregatum, & quadrata illorum iuncta ſint 10, uides manifeſte, quod ſi ponatur aggregatum illorum res, ipſa erit diuidenda ſecundum proportionem habentem medium & duo extrema, eruntq; partes, ℞ v: $\frac{5}{4}$ quadrati m: $\frac{1}{2}$ poſitionis, & 1 $\frac{1}{2}$ poſitiones m: ℞ v: $\frac{5}{4}$ quadrati, harum igitur quadrata erunt 5 quadrata m: ℞

20

20 q̃d'q̃dratorum, & erunt æqualia 10, igitur ex capitulo argumentandi p: & m: 5 quadrata m: 10, æquantur R̷ 20 q̃d'q̃dratorum, quare partes erunt ut uides.

R̷ V: $2\frac{1}{2}$ p: R̷ 5 p: R̷ V: $2\frac{1}{2}$ m: R̷ 5
R̷ V: $2\frac{1}{2}$ p: R̷ 5 m: R̷ V: $2\frac{1}{2}$ m: R̷ 5

QVÆSTIO XVIII.

Inuenias tres numeros proportionales, quorum primus & secundus æquentur tertio, & quadrata primi & secundi iuncta, sint 10. Pones tertiũ 1 positionem, fac de 1 positione duas partes, quarum quadrata iuncta sint 10, & erunt $\frac{1}{2}$ positionis p: R̷ V: 5 m: $\frac{1}{4}$ quadrati & $\frac{1}{2}$ positio m: R̷ V: 5 m: $\frac{1}{4}$ quadrati, duc 1 positionem in minorem, & producetur quadratum maioris, aliter diuides 1 positionem secundum proportionem habentem medium & duo extrema, inde duces partes ad quadratum, & quadrata iuncta erũt 10, partes igitur erunt.

p^a	R̷ V: $22\frac{1}{2}$ p: R̷ 405 m: R̷ V: $12\frac{1}{2}$ p: R̷ 125
2^a	R̷ V: $12\frac{1}{2}$ p: R̷ 125 m: R̷ V: $2\frac{1}{2}$ p: R̷ 5
3^a	R̷ V: 10 p: R̷ 80.

QVÆSTIO XIX.

Similiter, si quis dicat, inuenias tres numeros, proportionales, ex quorũ ductu primi in secundum fiat 10, & primus cum secundo æquentur tertio, eodem modo procedendo habebis quantitates.

p^a	R̷ V: R̷ $31\frac{1}{4}$ p: 5 m: R̷ V: R̷ $31\frac{1}{4}$ m: 5
2^a	R̷ V: R̷ $31\frac{1}{4}$ p: 5 p: R̷ V: R̷ $31\frac{1}{4}$ m: 5
3^a	R̷ V: R̷ 500 p: 20

De regula liberæ positionis. Caput XXXVI.


St regula pro quæstionibus, quæ consequuntur proprietates numerorum uniuersales, quas homo ignorat, inde quærens per alias regulas, laborat inaniter, non enim proportionem exigunt, nec tamen in omnibus quantitatibus inueniri queunt, tales autem sunt.

QVÆSTIO I.

Inuenias quinq; quantitates, quarum secundæ q̃dratum, æquale sit aggregato earum, cum quadrato primæ, sintq; hæ quantitates continue proportionales, ponam igitur in quacunq; uoluero proportionẽ, ab una positione inchoando, uelut in figura uides, eritq; in dupla (exempli gratia) quadratum secundæ, 4 quadrata, & hoc æquatur 1 quadrato quod est qua-

1 q̃d.	1 pos.
4 q̃d.	2 pos.
	4 pos.
	8 pos.
	16 pos.
3 q̃d.	æq̃lia
31 pos.	

dra-

dratũ primæ & 31 rebus, igitur 3 q̃drata æq̃ntur 31 rebus, & res erit 10 $\frac{1}{3}$, & reliquæ secundũ duplam proportionẽ, ut uides, 10 $\frac{1}{3}$, 20 $\frac{2}{3}$, 41 $\frac{1}{3}$, 82 $\frac{2}{3}$, 165 $\frac{1}{3}$.

QVÆSTIO II.

Inuenias duos numeros, in proportione dupla, quorum quadrata, uel cubi, uel relati, sint æqualia ipsis, & sit exemplum de relatis, tanquam magis admirandis. Ponemus igitur in ꝓportione dupla, 1 positionem & 2 positiones, quorum relata erunt, 32 relata prima, & 1 relatum primũ, iunge, fient 33 relata prima, æqualia 3 rebus, igitur per capitulum simplex, res erit R: R: R: $\frac{1}{11}$, diuiso 3 per 33, reliqua quantitas igitur erit R: R: R: 1 $\frac{5}{11}$, scilicet duplum R: R: R: $\frac{1}{11}$.

QVÆSTIO III.

Inuenias tres quantitates proportionales, quarum proportio sit tripla, & $\frac{1}{4}$ aggregati, in se ductum, producat $\frac{1}{7}$ secundæ quantitatis. Ponemus igitur quantitates, 1 positionẽ, 3 pos. 9 pos. harum aggregatum est 13 positiones, cuius $\frac{1}{4}$ est 3 $\frac{1}{4}$ positiones, & quadratum est 10 $\frac{9}{16}$, & hoc est $\frac{1}{7}$ de 3 positionibus, igitur 73 $\frac{15}{16}$ quadrata, ęquantur 3 positionibus, quare positio est $\frac{48}{1183}$, & quantitas secũda erit $\frac{144}{1183}$ & tertia erit $\frac{432}{1183}$.

QVÆSTIO IIII.

Inuenias tres numeros proportionales, quorum secundus sit 10, & $\frac{1}{20}$, aggregati omnium in se ductum, producat septuplum secundi, ponemus primum rem, igitur tertius erit $\frac{100}{1\ pos.}$, & quia $\frac{1}{20}$ aggregati in se ductũ, producit septuplum secundi, igitur producit 70, & R: 70, est $\frac{1}{20}$ aggregati, igitur aggregatum est R: 28000, & ideo prima & tertia, erunt R: 28000 m: 10, & hoc æquale est 1 positioni p: $\frac{100}{1\ pos.}$, igitur 1 q̃dratum p: 100, æquatur positionibus R: 28000 m: 10, igitur prima quantitas fuit R: 7000 m: 5 m: R: v: 6925 m: R: 700000, & tertia quantitas erit R: 7000 m: 5 p: R: v: 6925 m: R: 700000, posset etiam breuius fieri, sed absq; positione.

De regula falsum ponendi. Cap. XXXVII.

REGVLA I.



Æc regula triplex est, aut em̃ ponit m: aut quęrit R: m: aut quęrit quod nõ est. Primo igitur quęrimus quęstionũ solutiões, quæ per p: uerificari minime possunt, uelut si quis dicat, q̃dratũ æq̃tur 4 rebus p: 32, & in eadẽ æstimatione, q̃dratũ æq̃tur 1 rei p: 20, tunc si uelles sequi æstimationẽ uerã, in prima res esset 8, in secunda autem quæstione 5, sed si dicas conuertendo igitur quadratum p: 4 rebus, æquatur 32, & res erit 4, & in hoc

etiam uerum erit, quòd quadratum & res, æquantur 20, dic igitur, si 4 p: seruit his quæsitis, igitur 4 m: est æstimatio 1 q̃drati, æqualis 4 rebus p: 32, & 1 quadratum æquale 1 rei p: 20, ideo conuertes capitula, ut in primo capitulo diximus, & si casus est impossibilis, in utroq; quæstio falsa est, per p: & per m: & si uera est, per p: in uno, erit uera per m: in alio, & eiuscemodi generis est quæstio hæc.

QVÆSTIO I.

Dos uxoris Francisci, est aurei 100 plusq; Francisci peculium, & dos uxoris eius in se ducta, est aurei 400 plus peculio Francisci in se ducto, quæritur dos, & peculium. Ponemus Franciscum habere rem unam m: igitur dos uxoris est aurei 100 m: 1 re, duc partes in se, fient 1 q̃dratum & 10000, p: 1 quadrato m: 200 positionibus, horũ differentia est 400 aurei, igitur 1 quadratum p: 400 p: 200 positionibus, æq̃tur 10000 p: 1 quadrato, abijce communia, habebis 9600, æqualia 200 positionibus, igitur res est 48, & tantũ habuit m: id est debiti, & dos erit residuũ ad 100, scilicet 52,

m: 1 pos.	100 m: 1 pos.
1 q̃d.	10000 p: 1 q̃d.
	m: 200 pos.

differentia 10000 m: 200 pos. æqualis 400

igitur Franciscus habuit 48 aureos debiti, sine ullo capitali uel peculio, & dos eius uxoris fuit 52 aureorum, & secus operando peruenires ad quæstiones difficillimas, ac inextricabiles. Talismodi etiã hæc est.

QVÆSTIO II.

Ego habeo aureos 12 plus Francisco, & cubus meorum est, 1161 aurei plus cubo Francisci, ponatur 1 res m: Francisco, ego habeo 12 aureos m: 1 positione, duc ad cubum partes, fient 1 cubus m: & 1728 p: 36 q̃dratis m: 432 rebus m: 1 cubo, & horum differentia, est 1161, igitur 1 cubus m: p: 432 rebus p: 1161, ęquabitur 1728 p: 36 quadratis m: 1 cubo, abijce m: 1 cubum & 1161 ex utraq; parte, fient 432 res æq̃les 36 q̃dratis p: 567, quare 1 q̃dratũ p: 15 $\frac{3}{4}$, æq̃lia 12 rebus, igitur res est 1 $\frac{1}{2}$, & hoc habuit m: Franciscus, & ego 10 $\frac{1}{2}$ p: & tot sunt aurei q̃siti.

QVÆSTIO III.

Et eodem modo, si dicam etiam sic, aurei mei sunt 12 p: quàm illi Francisci. Et q̃dratum meorum est 128 p: cubo aureorum Francisci, dabimus rem unam m: Francisco, ego uero habeo 12 aureos m: 1 re, & quadratum meorum erit 144 p: 1 quadrato m: 24 rebus, & hoc æquale est m: 1 cubo p: 128, igitur 16 p: 1 quadrato p: 1 cubo, æquatur 24 rebus, Et res erit 4 m: & tantum habet Franciscus debiti, ego uero aureos 8 peculij.

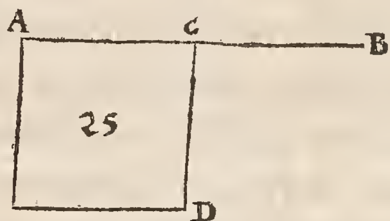
REGVLA II.

Secundum genus positionis falsæ, est per radicem m: Et dabo exemplum,

exemplum, si quis dicat, diuide 10 in duas partes, ex quarum unius in reliquam ductu, producatur 30, aut 40, manifestum est, quòd casus seu quæstio est impossibilis, sic tamē operabimur, diuidemus 10 per æqualia, & fiet eius medietas 5, duc in se fit 25, auferes ex 25, ipsum producendum, utpote 40, ut docui te, in capitulo operationum, in sexto libro, fiet residuum m: 15, cuius R̷ addita & detracta à 5, ostendit partes, quæ inuicem ductæ producunt 40, erunt igitur hæ, 5 p: R̷ m: 15, & 5 m: R̷ m: 15.

Demonstratio

Vt igitur regulæ uerus pateat intellectus, sit A B linea, quę dicatur 10, diuidenda in duas partes, quarū rectangulum debeat esse 40, est aūt 40 q̄druplū ad 10, quare nos uolumus quadruplum totius A B, igitur fiat A D, quadratum A C, dimidij A B, & ex A D auferatur quadruplum A B, absq; numero, R̷ igitur residui, si aliquid maneret, addita & detracta ex A C, ostenderet partes, at quia tale residuum est minus, ideo imaginaberis R̷ m: 15, id est differentiæ A D, & quadrupli A B, quam adde & minue ex A C, & habebis quæsitum, scilicet 5 p: R̷ v: 25 m: 40, & 5 m: R̷ v: 25 m: 40, seu 5 p: R̷ m: 15, & 5 m: R̷ m: 15, duc 5 p: R̷ m: 15 in 5 m: R̷ m: 15, dimissis incruciationibus, fit 25 m: m: 15, quod est p: 15, igitur hoc productum est 40, natura tamē A D, non est eadem cū natura 40, nec A B, quia superficies est remota à natura numeri, & lineæ, proximius tamē huic quantitati, quę uere est sophistica, quoniam per eam, non ut in puro m: nec in alijs, operationes exercere licet, nec uenari quid sit est, ut addas quadratum medietatis numeri numero producendo, & à R̷ aggregati minuas ac addas dimidium diuidendi. Exemplū, in hoc casu, diuide 10 in duas partes, producentes 40, adde 25 quadratū dimidij 10 ad 40, fit 65, ab huius R̷ minue 5, & adde etiam 5, habebis partes secundum similitudinem, R̷ 65 p: 5 & R̷ 65 m: 5. At hi numeri differunt in 10, non iuncti faciunt 10, sed R̷ 260, & hucusq; progreditur Arithmetica subtilitas, cuius hoc extremum ut dixi, adeo est subtile, ut sit inutile. 2



5 p: R̷ m: 15
5 m: R̷ m: 15
25 m: m: 15 q̄d. est 40

Qvæstio IIII.

Fac de 6 duas partes, quarum quadrata iuncta sint 50, hæc soluitur per primam, non per secundam regulam, est enim de puro m: ideo duc 3 dimidium 6 in se, fit 9, minue ex dimidio 50, quod est 25, fit residuum

ſiduum 16,cuius ℞ 4,adde & minue à 3,dimidio 6,fiunt partes 7,& 1 m:harum quadrata iuncta ſunt 50,& aggregatum eſt 6.

QVÆSTIO V.

Per idem ſoluitur quæſtio hæc,fac ex 6 duas partes,quarum una in reliquam ducta,producatur m:40,duc 3,dimidium 6, in ſe, fit 9, adde ad 40,fit 49,huius ℞ quæ eſt 7,adde ad 3, dimidium 6, & minue, habebis 10 p:& 4 m: quæ ducta inuicem, producunt 40 m: & iuncta,faciunt 6,& ita 10,m:& 4 p:producant 40 m:& iuncta, faciunt 6 m:ideo etiam hæc quæſtio, eſt de puro m: & pertinet ad primam regulam.

Cor^{m}. Ex hoc patet,quod ſi quis dicat,fac de 6 duas partes,ex quarum multiplicatione inuicem, producatur 40, quæſtio eſt de m: ſophiſtico,& pertinet ad ſecundam regulam.Et ſi dicat,fac de 6 duas partes, ex quarum multiplicatione inuicem producatur 40 m:uel ex 6 m: fiant duæ partes producentes m:40, utroq; modo erit quæſtio de m: puro,& pertinebit ad primam regulam, & tales partes erunt quæ dictę ſunt,& ſi dicat,quod ex 6 m:fiant duæ partes,quarum ꝓductum ſit 40 p:quæſtio erit de m:ſophiſtico, & pertinebit ad ſecundam regulam;& erunt partes m:3 p:℞ m:15,& m:3 m:℞ m:15.

REGVLA III.

Poſſumus uero uenari genus m:aliud,quod neq; eſt purum m: neq; ℞ m: ſed res omnino falſa, & cõponitur hæc regula quaſi ex ambobus, & dabo huius unum exemplum,quod eſt hoc.

QVÆSTIO VI.

Inuenias tres numeros proportionales, quorum ℞ primi detracta à primo,faciat ſecundum,& ℞ ſecundi,detracta à ſecundo, faciat tertium.Ponemus igitur primum,1 quadratũ, & ſecundus erit 1 q̃d. m:1 poſitione,& tertius erit 1 q̃d. m: 1 poſitione m: ℞ v: 1 quadrati m: 1 poſitione, duc primum in tertium, & ſecundum in ſe, habebis quantitates ipſas, operando ut uides, & productum primi in tertium,eſt m: $\frac{1}{16}$ p: ℞ $\frac{1}{64}$,quod eſt $\frac{1}{8}$ m: $\frac{1}{16}$, & tantum fit ducto ſecundo numero in ſe.

$\frac{1}{4}$	m: $\frac{1}{4}$	m: $\frac{1}{4}$ m: ℞ m: $\frac{1}{4}$

Quomodo excidant partes & denominationes multiplicando. Cap. XXXVIII.

REGVLA I.



ETſi hoc & generale ſit, & abunde in libro quarto & quinto demonſtratum,nihilominus denuo ad facilitatem & utilitatem repetendum erit,fit autem hoc duobus modis, totidemq;

tidemq́ regulis indigemus, quarum prima particularis est, & inuenta causa capitulorum illorum, quæ postmodum Geometrica ratione, in quatuor denominationibus superius à nobis sunt demonstrata, nūc inuentis illis, eius utilitas magna ex parte extincta est, docebimus tamē eam ob artis locupletationem, & ingenij eius admirationem, cum etiam ad alia utilis sit, ad quæ transferri commode potest, quanq́ nullo usui generali possit cōuenire. Igitur eius regula hęc est, Vel uis numeros differentes, quorum quadratum unius, cū cubo alterius faciant iuncti, numerū, tunc diuides differentiam illam in duas partes, quarum triplum quadrati unius, sit æquale duplo alterius, per positionem, inde inuentis partibus, pones rem, p: parte, cuius sumitur triplum quadrati, pro parte cubanda, & partem quadrandam, rem m: parte, cuius sumitur duplum, inde peracta operatione, peruenies ad cubum, ac quadrata æqualia numero, excidentibus rebus.

QVÆSTIO I.

Exemplum. Inuenias duos numeros, quorum differentia sit 8, & cubus unius, cum alterius q̃drato iunctus, faciat 100, fac p° per positionē duas partes, quarū triplum q̃drati unius, sit ęq̃le duplo alterius, quas inuenies esse, 2 & 6, nam triplum 4, q̃drati 2, est 12, quod est duplum 6 residui, igitur pones partem cubandā positionē p: 2, & q̃drandam positionem m: 6, iunge cubū 1 positionis, p: 2, cum q̃drato 1 positiõis m: 6, habes 1 cub. p: 7 q̃dratis p: 44, æq̃lia 100, igitur 1 cub. p: 7 q̃dratis, æq̃tur 56, & rei æstimatio, erit ℞ v: cubica 15 $\frac{8}{27}$ p: ℞ 72 $\frac{16}{27}$ p: ℞ v: cubica 15 $\frac{8}{27}$ m: ℞ 72 $\frac{16}{27}$ m: 2 $\frac{1}{3}$, & quia partes fuerūt, res p: 2, & res m: 6, ideo huic adde 2, & minue 6, habebis partes, ut uides à latere. Est aūt manifestum, quod una illarum est m: purum, & si uoluisses ut essent ambę p: oportuisset ponere, quòd cubus & q̃dratum talium numerorum æquarentur numero maiori, ut puta 1000, loco 100.

pos. p: 2
pos. m: 6
cub. p: 12 pos. p: 6 q̃d. p: 8
m: 12 pos. p: 1 q̃d. p: 36
cub. p: 7 q̃d. p: 44
æqualis 100

| ℞ v: cub. 15 $\frac{8}{27}$ p: ℞ 72 $\frac{16}{27}$ p: ℞ v: cub. 15 $\frac{8}{27}$ m: ℞ 72 $\frac{16}{27}$ m: $\frac{1}{3}$
| ℞ v: cub. 15 $\frac{8}{27}$ p: ℞ 72 $\frac{16}{27}$ p: ℞ v: cub. 15 $\frac{8}{27}$ m: ℞ 72 $\frac{16}{27}$ m: 8 $\frac{1}{3}$

Et eodem modo facies, si uolueris, quod numerorum differentiū in aliquo numero, cubus & quadratum differant in assignato numero, eadem regula inuenies partes differentiæ, quibus inuentis, pones econtra, scilicet positionem m: numero, cuius sumitur triplum q̃drati, & positionem p: numero, cuius sumitur duplum, inde sequeris operationem, ut in exemplo.

QVÆSTIO II.

Inuenias duos numeros,quorũ differẽtia ſit 8,& differẽtia cubi uni us,à q̃drato alterius,ſit 100,facies ex 8 duas partes, ut dictũ eſt, & erũt 2, & 6,pones igiť rem m:2, & rẽ p:6, cuba rem m:2,& q̃drata rem p:6,& ſume differentiam habebis cubũ m:7 quadratis m:44,æqualem 100, quare cubus æquabitur 7 quadratis p:144,& rei æſtimatio erit ℞ v: cubica 84 $\frac{19}{27}$ p: ℞ 7013 $\frac{1}{3}$ p: ℞ v: cubica 84 $\frac{19}{27}$ m: ℞ 7013 $\frac{1}{3}$ p:2 $\frac{1}{3}$,& quia nos poſuimus partes,rem m:2,& rem p:6,erũt numeri quæſiti,ut uides.

poſ.m:2
poſ. p:6
cub.p:12 poſ.m:6 q̃d.m:8
p:12 poſ.p:1 q̃d.p:36

cub.m:7 q̃d.m:44
æqualis 100

Et ſimiliter,ſi dicat,duas fac partes ex aliquo numero, quorum quadratum unius,cum cubo alterius iunctum, faciat aliquem numerum,facies enim duas partes ex numero diuidendo,ut ſupra,quarum uni,ſcilicet cuius ſumitur triplum quadrati,addes rem,alteri cuius ſumitur duplum ipſius,detrahes rem,inde perficies operationem, ut in exemplo.

℞ v:cu.84 $\frac{19}{27}$ p:℞ 7013 $\frac{1}{3}$ p:℞ v:cu.84 $\frac{19}{27}$ m:℞ 7013 $\frac{1}{3}$ p: $\frac{1}{3}$
℞ v:cu.84 $\frac{19}{27}$ p:℞ 7013 $\frac{1}{3}$ p:℞ v:cu.84 $\frac{19}{27}$ m:℞ 7013 $\frac{1}{3}$ p:8 $\frac{1}{3}$

QVÆSTIO III.

Fac ex 8 duas partes,quarum cubus unius,cum quadrato alterius,faciat 400, facies ex 8 duas partes,ut prius,quæ erunt 6 & 2,& pones 2 p:re,& 6 m:re,duces 2 p:1 poſitione ad cubum,& 6 m:1 poſitione ad quadratum,habebis iungendo 1 cub. p:7 quadratis p:44, æqualia 400,igitur 1 cub. p:7 quadratis,æquatur 356,quare rei æſtimatio,eſt ℞ v:cubica 165 $\frac{8}{27}$ p:℞ 27161 $\frac{13}{27}$ p:℞ v:cubica 165 $\frac{8}{27}$ m:℞ 27161 $\frac{13}{27}$ m:2 $\frac{1}{3}$,quare cum partes ſint 2 p:1 poſitione, & 6 m:1 poſitione, ipſæ erunt quales uides,8 $\frac{1}{3}$ m:℞ v:cubica 165 $\frac{8}{27}$ p:℞ 27161 $\frac{13}{27}$ m:℞ v:cubica 165 $\frac{8}{27}$ m:℞ 27161 $\frac{13}{27}$ ℞ v:cubica 165 $\frac{8}{27}$ p:℞ 27161 $\frac{13}{27}$ p:℞ v:cubica 165 $\frac{8}{27}$ m:℞ 27161 $\frac{13}{27}$ m: $\frac{1}{3}$.

2 p: 1 poſ.
6 m: 1 poſ.
8 p:6 q̃d.p:12 poſ.p:1 cub.
36 p:1 q̃d.m:12 poſ.

44 p:7 q̃d.p:1 cub.
æqualia 400

1 cub. p:7 q̃d. æqual. 356

Et ſi dicat de diuiſione numeri aſsignati,in duas partes, quarum differentia cubi unius à quadrato alterius, ſit numero dato æqualis, tunc ſemper pones $\frac{1}{3}$ p:1 poſitione,pro parte quæ cubari debet,& reſiduum numeri diuidendi,detracto $\frac{1}{3}$ m:1 poſitione, pro numero in

ſe

se ducendo, inde facta detractione, habebis cubum & res æquales numero, quare erit cognita utraque pars confestim.

QVÆSTIO IIII.

Exemplum, Diuide 8 in duas partes, quarum cubus unius, excedat quadratum alterius, in 10. Ponemus itaque partem primam $\frac{1}{3}$, & secundam $7\frac{2}{3}$, & addemus ad $\frac{1}{3}$, rem, & fiet $\frac{1}{3}$ p: 1 positione, & minuemus rem ex $7\frac{2}{3}$, & fiet $7\frac{2}{3}$ m: re, inde sequemur operationem, & habebimus pro cubo, $\frac{1}{3}$ p: 1 positione, hoc, 1 cubo p: 1 quadrato p: $\frac{1}{3}$ positionis p: $\frac{1}{27}$, & pro quadrato, 1 quad. m: $15\frac{1}{3}$ positionibus p: $58\frac{7}{9}$, horum differentia erit 1 cubus p: $15\frac{2}{3}$ positionib' m: $58\frac{20}{27}$ & hoc æquatur 10, igitur cubus & $15\frac{2}{3}$ positiones, æquatur $68\frac{20}{27}$, & rei æstimatio cognita est, cui addemus $\frac{1}{3}$ pro prima parte, & minuemus eam à $7\frac{2}{3}$, pro secunda parte, & si uoluissemus, quod quadratum superasset cubum, detraxissemus 10 numerum æquationis, ex $58\frac{20}{27}$, & haberemus 1 cubũ p: $15\frac{2}{3}$ positionibus, equalem $48\frac{20}{27}$, & modi huius primę regulę sunt innumerabiles, & sunt quasi pars regulæ de modo.

$\frac{1}{3}$	p:	1 pos.
$7\frac{2}{3}$	m:	1 pos.
$\frac{1}{27}$ p: $\frac{1}{3}$ pos. p: 1 q̃d. p: 1 cu.		
$58\frac{7}{9}$ m: $15\frac{1}{3}$ pos. p: 1 q̃d.		
$58\frac{20}{27}$	$15\frac{2}{3}$ pos. p: 1 cub.	

REGVLA II.

Verum alia regula quæ multum apud nos in usu est, & facilior, talis est, & etiam exemplis ut reliquæ facilius explicabitur.

QVÆSTIO V.

Fac igitur ex 8 duas partes, quarum assumptis quadratis simul, item cubis simul, ductoque uno aggregato per alterum, fiat numerus perfectus, possem dicere, quod faceret etiam numerum terminatum, ut 10000, uel alium, datur etiam maximus quem potest producere, & est 32768, & producitur ex cubo totius, in quadratum totius, datur etiam minimus quo minorem producere non potest, & est 4096. Videndum est igitur primo, an inter hos duos numeros, cadat numerus perfectus, & est 8128, qui si non caderet, esset quæstio impossibilis, pone igitur unam partem 4 m: 1 positione, aliam 4 p: 1 positione, & fient quadrata, 16 p: 8 positionibus p: 1 quadrato, & 16 m: 8 positionibus p: 1 quadrato, quę iuncta erunt 32 p: 2 quadratis, excidentibus rebus, cubi etiam erunt, 64 p: 12 quadratis p: 48 positionibus p: 1 cubo, & 64 p: 12 q̃dratis m: 48 positionibus m: 1 cubo, qui iuncti, sunt 128 p: 24 quadratis, quare ducemus 32 p: 2 quadratis, in 128 p: 24 quadratis, & fient 4096 p: 1024 quadratis p: 48 q̃d'q̃dratis, & hæc sunt æqualia 8128, igitur habebimus, facta detractione & diuisione,

1 q̃d'q̃d^m

1 qd qdratum p: $21\frac{1}{3}$ qdratis, æqualia 84, quare res est R v: R $197\frac{7}{9}$ m: $10\frac{2}{3}$, partes igitur sunt 4 p: dicta radice & 4 m: dicta radice.

QVÆSTIO VI.

Fac de 10 duas partes, quarum radices quadratæ cubicatæ faciãt 26, pone quod tales R sint 1 positio, fac ex 1 positione duas partes, quarum quadrata iuncta sint 10, eo quòd radices talium partium debent aggregare 1 positionem, ex regulis igitur sexti libri, uel ex Euclide, habebis partes, ut uides, id est, $\frac{1}{2}$ positionem p: R v: 5 m: $\frac{1}{4}$ quadrati & $\frac{1}{2}$ positionis m: R v: 5 m: $\frac{1}{4}$ quadrati, istæ reducendæ sunt ad cubum, & quia in cubando Binomium, oportet ducere quamlibet partium in se, & triplare, & addere quadrato alterius partis, & productum ducere in illam alteram partem, ideo cum talia producta assimilentur, & sint æqualia, & unum sit p: aliud m: quando duceremus triplum quadrati primæ partis cum quadrato secundæ in secundam, ideo sufficiet ducere, triplum quadrati secundæ partis, quod est 15 m: $\frac{3}{4}$ quadrati cum quadrato primæ partis, quod est $\frac{1}{4}$ quadrati, & fiet totum 15 m: $\frac{1}{2}$ quadrati, in primam partem quę est $\frac{1}{2}$ positio, sed quia hæc operatio geminanda est, propter duas partes, habebimus multiplicationem 15 m: $\frac{1}{2}$ quadrati, in 1 positionem, quæ est duplum $\frac{1}{2}$ positionis primæ partis, igitur tandem producentur 15 positiones m: $\frac{1}{2}$ cubi, æqualis 26, quare 1 cubus p: 52, æquabitur 30 positionibus, & rei æstimatio erit ex capitulo suo, R 27 m: 1, inde habebis partes, ut uides, & in uerificatione operationis, multo magis hac regula indiges ad facilitatem, uerum de hoc diximus in tertio libro suo loco.

$\frac{1}{2}$ pos. p: R v: 5 m: $\frac{1}{4}$ qd.
$\frac{1}{2}$ pos. m: R v: 5 m: $\frac{1}{4}$ qd.

R $6\frac{3}{4}$ m: $\frac{1}{2}$ p: R v: R $6\frac{3}{4}$ m: 2
R $6\frac{3}{4}$ m: $\frac{1}{2}$ m: R v: R $6\frac{3}{4}$ m: 2

QVÆSTIO VII.

Et ad hanc reducitur quæstio illa, quidam emit Croci lib. 1. Cinamoni lib. 2. Piperis lib. 5, precijs proportionalibus, sic, ut se habuit precium totius piperis, ad precium cinamomi, sic precium cinamomi, ad precium croci, ita quòd precium croci fuit minimum, & piperis maximum, & cinamomi medium, & hæc tria precia, iuncta simul, fuerunt 6 aurei. Denuo sub eisdem precijs emit croci lib. 30, cinamomi lib. 50, piperis lib. 40, aureis 100, quæritur singulorum precia. Hæc quęstio, à fratre Luca posita est, sed in numeris ꝓportionalibus, nam sic existimat eam admodum difficilem, sed non est, nam cum precia hæc, 5 librarum piperis, & 2 cinamomi, & 1 croci sint proportionalia, ipsa manebunt etiam proportionalia, in suis aggregatis, diuide-

mus

mus igitur 30 lib. croci per 1, & est secunda quantitas per primam, & ita 50 cinamomi per 2, & 40 piperis per 5, & exibunt numeri in margine, id

Crocus	Cinamomū	Piper	Aurei
30	50	40	100
1	2	5	6
30	25	8	100

est 30, pro croco, 25 pro cinamomo, & 8 pro pipere, manifestum est igitur quod hi sunt numeri trium quantitatum ꝓportionalium, quæ sunt precia 1 lib. croci, 2 cinamomi, & 5 piperis, & quod prima quantitas seu precium, sumptum 30 uicibus, & secundum 25 uicibus, & tertium 8 uicibus, faciunt 100 aureos, at uero istæ quantitates, ut dictū est, sunt 6 aurei, simpliciter sumptæ, fac igitur ex 6 tres quantitates proportionales, quarum prima ducta per 30, secunda per 25, tertia per 8, faciant 100. Ponemus igitur, mediam 2 positiones, relinquentur reliquæ, 3 m: 1 positione p: R̸ v: 9 m: 3 quadratis m: 6 positionibus, & 3 m: 1 positione m: R̸ v: 9 m: 3 quadratis m: 6 positionibus, ducendæ igitur sunt singulæ per suos numeros, quia igitur primę partes Binomiorum sunt æquales, & ambæ p: tantum erit ducere eas per 30, & per 8, quantum per 38, & similiter, quia radicū uniuersalium una est m: ducenda per 30, alia p: ducenda per 8, tantum erit, cum sint æquales, quantum, si ducant̄ per 22, differentiam 30 & 8, & producentur partes,

3 m: 1 pos. p: R̸ v: 9 m: 3 q̄d. m: 6 pos.
8

3 m: 1 pos. m: R̸ v: 9 m: 3 q̄d. m: 6 pos.
30

2 pos. —— 25 —— 50 pos.

p: 3 m: 1 pos. | m: R̸ v: 9 m: 3 q̄d m: 6 pos.
38 | 22

114 m: 38 pos. | m: R̸ v: 4356 m: R̸ 1452 quad. m: 2904 pos.

114 m: 38 pos.
50 pos.
m: R̸ v: 4356 m: 1452 q̄d. m: 2904 pos. æqualia 100

quas uides à latere, & ipsæ erunt æquales 100, iunge & detrahe similia, habebis 14 p: 12 positionibus, æqualia R̸ v: illi, quæ est m: & ideo quadratum quadrato, id est 196 p: 336 positionibus p: 144 quadratis, æqualia 4356 m: 1452 quadratis m: 2904 positionibus, æq̄lia partes, habebis 4160 æqualia 1596 quadratis p: 3240 positionibus, quare 1 q̄d. p: 2 $\frac{4}{133}$, æq̄tur 2 $\frac{242}{399}$, est igit̄ rei æstimatio R̸ 3 $\frac{4494602}{7057911}$ m: 1 $\frac{2}{133}$, precium igitur unius libræ croci, est aurei 4 $\frac{2}{133}$ m: R̸ 3 $\frac{4494602}{7057911}$, & precium duarū librarum cinamomi, est R̸ 14 $\frac{3862586}{7057911}$ m: 2 $\frac{4}{133}$, & precium quinq; librarū piperis, est R̸ 3 $\frac{4494602}{7057911}$ p: 1 $\frac{131}{133}$,

 si igitur

ſi igitur diuiſeris hæc precia proportionalia, per ſuarum librarum numerum, referendo ſingula ſingulis, primum per 1, ſecundum per 2, tertium per 5, habebis precia librarum ſingularum, uniuſcuiuſque generis, & ſi duxeris ea per duos numeros, in ſecunda emptione, precium croci per 30, cinamomi per 50, piperis per 40, habebis quãtum pecuniarum ſingulis impenderit.

QVÆSTIO VIII.

Eodem modo ſoluitur quæſtio hæc, fac ex 14 tres partes proportionales, quarum maior ducta per 2, media per 3, minor per 4, producta hæc iuncta, faciant 36, peruenies enim per modum ſuperioris, ad 1 q̃dratum p: 9 $\frac{1}{3}$ poſitionibus, æqualia 53 $\frac{1}{3}$, quare res eſt ℞ 75 $\frac{1}{9}$ m: 4 $\frac{2}{3}$, & eſt 4, media quantitas, poſita media quantitate 1 poſitione, non ut in priore, 2 poſitionibus.

QVÆSTIO IX.

Diuide 14 in tres partes proportionales, ut ducta prima per 2, ſecunda per 3, talia producta æquẽtur tertiæ multiplicatæ per 7. Pones ſecundam, eſſe 2 poſitiones, reliquæ erunt ut uides, ducta ſecunda per 3, fiunt 6 poſitiones, modo prima habet multiplicari p 2, & tertia per 7, & habent detrahi,

2^a	2 poſ.
p^a	7 m: 1 poſ. p: ℞ v: 49 m: 14 poſ. m: 3 q̃d.
3^a	7 m: 1 poſ. m: ℞ v: 49 m: 14 poſ. m: 3 q̃d.

igitur cum ambæ partes ſint ſimiles, & prima in ambabus ſit p: & ſecunda in prima ſit p: in tertia m: ideo primam partem ſufficit multiplicare p differentiam 7 & 2, quæ eſt 5, & producentur pro tertia parte, 35 m: 5 poſitionibus, quibus demptis 6 poſitionibus producto ſecundæ partis, habebimus 35 m: 11 poſitionibus, pro differentia tertij & ſecundi producti, primum autem producetur, ducto 9 aggregato primi & tertij, in radicem uniuerſalem, & fit ℞ v: 3969 m: 1134 poſitionibus m: 243 quadratis, hæc igitur æquatur 35 m: 11 poſitionibus, quare quadratum quadrato, igitur 1225 m: 770 poſitionibus p: 121 quadratis, æquantur 3969 m: 1134 poſitionibus m: 243 quadratis, æqua partes, habebis 2744 ęqualia 364 poſitionibus p: 364 quadratis, quare 1 q̃d. p: una poſitione æquantur 7 $\frac{7}{13}$, quare rei æſtimatio eſt cognita, et eius duplum eſt pars ſecunda, ſcilicet ℞ 31 $\frac{2}{3}$ m: 1.

QVÆSTIO X.

Fac de 8 tres partes proportionales, ut aggregatum quadratorũ primæ & ſecundæ, triplum ſit quadrato ſecundæ, pones quantitatem mediam 2 poſitiones, eius quadratum eſt 4 quadrata, cuius triplum eſt aggregatum quadratorum primæ & tertiæ, eſt autem prima 4 m: 1 poſi-

1 positione p:℞ v: 16 m:8 positionibus m:3 quadratis,& tertia est 4 m:1 positione m:℞ v: 16 m:8 positionibus m:3 quadratis, deducendo igitur hæc ad quadrata, uides quod oportet multiplicare ℞ v: in se semel, & partē primā in se semel, & omnia sunt p: quare sufficiet talia producta duplicare, deinde oporteret ducere ℞ v: in primā partem bis, quare cum in una ꝓducatur p: in alia m: suppositis, partibus æqualibus, nihil producet, igitur habebimus aggregatum quadratorum 64 m:32 positionibus m:4 q̃dratis,& hoc est ęquale 12 quadratis, triplo quadrati secundæ, igitur 1 q̃dratum p:2 positionibus ęquatur 4,& res est ℞ 5 m:1,& duplum eius, est quantitas media scilicet ℞ 20 m:2,& reliquæ, ut uides, quadratum secundæ est 24 m:℞ 320, quadrata autem primæ & tertiæ, 72 m: ℞ 2880 probata est.

4 m:1 pos.	p:℞ v: 16 m:8 pos. m:3 q̃d.
4 m:1 pos.	p:℞ v: 16 m:8 pos. m:3 q̃d.
4 m:1 pos.	m:℞ v: 16 m:8 pos. m:3 q̃d.
4 m:1 pos.	m:℞ v: 16 m:8 pos. m:3 q̃d.
32 m:16 pos. p:2 q̃d.	p:32 m:16 pos. m:6 q̃d.

p^a	5 m:℞ 5 p:℞ v: 6 m:℞ 20
3^a	5 m:℞ 5 m:℞ v: 6 m:℞ 20

Sed si diceret, quod quadrata primæ & tertiæ, tripla essent quadratis secundæ & tertiæ, tunc difficulter per hanc regulam soluitur, uerum facilius longe, per primam regulam 39^i capituli, ponendo quantitates 1, 1 positio, & 1 quadratum, habebis 1 q̃d^r q̃dratum p: triplum de 1 quadrato p:1, quare res nota est.

QVÆSTIO XI.

Si dicas, fac ex 8 duas partes, quæ uicissim diuisæ per alterius quadratum, producant iuncta prouenientia 10, pones partes 4 p:1 positione & 4 m:1 positione,& per hanc regulam, peruenies ad capitulum deriuatiuum, q̃d^r q̃drati & q̃drati & numeri,& est facilis.

QVÆSTIO XII.

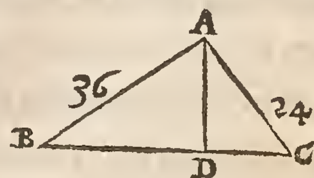
Inuenias quatuor numeros continue proportionales, quorum aggregatum, primi secundi & quarti, sit 15,& aggregatum primi & tertij & quarti sit 17, tunc dices, igitur cum hęc aggregata differant, per differentiam secundæ & tertiæ, igitur tertia est 2 p: quàm secunda, ponam igitur secundam, 1 positionem m:1,& tertiam 1 positionem p:1 nam sic differentia illarum erit 2, relinquetur igitur aggregatum primæ & quartæ 16 m:1 positione, duc secundam in tertiam, fit 1 q̃d. m:1, fac ex 16 m:1 positione duas partes, ex quarum multiplicatione inuicem, producantur 1 quadratū m:1,& erunt partes ut uides, quia

igitur ꝓportio quartæ ad tertiam, est ut secundæ ad primam, ex constituo, quia ꝓductum secundæ in tertiā, æquale est pro	8 m: $\frac{1}{2}$ pos. p: ℞ v: 65 m: 8 pos. m: $\frac{3}{4}$ q̄d. | 4ª 8 m: $\frac{1}{2}$ pos. m: ℞ v: 65 m: 8 pos. m: $\frac{3}{4}$ q̄d. | pª 1 pos. p: 1 3ª 1 pos. m: 1 2ª 2 cub. p: 6 pos.

ducto primæ in quartam, sufficiet ad demonstrandum, quòd sint continue proportionales, quod cubi secundæ & tertiæ iuncti æquales sint, productis quantitatum quartæ & primæ, in sua quadrata mutuo, at tales cubi, fiunt solum ex multiplicatione tripli quadrati secundæ partis, cum quadrato primæ, in ipsam primam, eo quod reliqua multiplicatio tripli quadrati primæ partis, cum quadrato secundæ in ipsam secundam, excidit, eo quod in una est p: in alia m: igitur habemus cubos iunctos, 2 cub. p: 6 positionibus, & tantum debet fieri ex multiplicatione quadratorum primæ & quartæ quantitatis, in ipsas quantitates uicissim, hoc aūt ut demonstratum est, æquale est ductui unius quantitatis in alteram, multiplicato in aggregatum ipsarum quantitatum, ex dictis in sexto libro, duc igitur quantitates inuicem, & quia ℞ v: sunt similes, multiplicatio in crucem nulla erit, quare sufficiet quadrare utramq; partem, & minuere unam ab altera, quia m: in p: facit m: producentur igitur à partibus similibus 1 q̄d. m: 1, aggregatum etiam radicum est 16 m: 1 positio, eo quod ℞ v: excidunt, igitur productum erit 16 q̄drata m: 1 cubo p: 1 positione m: 16, & hoc æquatur 2 cubis p: 6 positionibus, igitur 3 cubi p: 5 positionibus p: 16, æquantur 16 quadratis, quare res est in capitulo, uides autem quoniam inextricabilis quæstio ad magnam reducitur facilitatem, & posset reduci ad regulam de modo, nam ubi differentia est 2, semper 3 cubi p: 5 positionibus, p: numero medio inter duo aggregata per æquidistantiam, ęquantur totidem quadratis, quotus est numerus.

QVÆSTIO XIII.

Est trigonus A B C orthogonius, & eius perpendicularis ad basim A D, cuius latus A B, cum B D, est 36, & A C cum C D, est 24, quæritur area, pone B C 1 positionem, erit igitur quadratum B C 1 q̄d. & ideo cum A B & B D, sint 36, & rursus A C & C D, 24, erunt omnia latera trigoni 60, quare A B & B C, erunt 60 m: 1 positione, oportet igitur ex A B & A C, facere duas partes, quarum quadrata iuncta sint æqualia quadrato B C, secundum doctrinam 47ᵉ primi elemen. Euclidis, quare ex regulis sexti libri nostri, diuide 60



de 60 m: 1 positione per æqualia, fit 30 m: $\frac{1}{2}$ positiones, duc in se, fit 900 m: 30 positionibus p: $\frac{1}{4}$ quadrati, detrahe ex dimidio quadrati B C, relinquitur $\frac{1}{4}$ quadrati p: 30 positionibus m: 900, cuius R, addita & detracta, à dimidio aggregati A B & A C, ostendit partes; est igitur A B 30 m: $\frac{1}{2}$ positionis p: R v: $\frac{1}{4}$ quadrati p: 30 positionibus m: 900, & A C 30 m: $\frac{1}{2}$ positionis m: R v: $\frac{1}{4}$ quadrati p: 30 positionibus m: 900, quare si detrahatur A B ex aggregato A B & B D, relinquetur B D 6 p: $\frac{1}{2}$ positionis m: R v: $\frac{1}{4}$ quadrati p: 30 positionibus m: 900, & similiter, detracta A C, ex aggregato A C & C D, relinquitur C D, $\frac{1}{2}$ positionis m: 6 p: R v: $\frac{1}{4}$ quadrati p: 30 positionibus m: 900, est autem manifestum ex demonstratione 47[e], primi elementorum Euclid. quod differentia quadrati A B, à quadrato A C, æqualis est differentiæ quadrati B D, à quadrato C D, differentia autem duarum quantitatum, est semper in partibus dissimilibus, nam quæ similes sunt, nullam producunt differentiam, quare cum quadrata partium constent ex nouem multiplicationibus, quarum tres sunt quadrata partium, erunt illæ tres omnino similes, comparando A B ad A C, & B D ad C D, & similiter multiplicationes duæ 30 in $\frac{1}{2}$ positionis, sunt communes A B & A C, cum utræque producant m: & ita in B D & C D, communes sunt multiplicationes, 6 in R v: nam utrinque prouenit idem m: differentia igitur A B & A C, ex parte A B, est multiplicatio 30 in R v: & ex parte A C, multiplicatio $\frac{1}{2}$ positionis in R v: quare differentia quadratorum A B, & A C, est illud quorum R v: 225 quadratorũ p: 27000 positionibus m: 810000, excedit R v: $\frac{1}{16}$ q̃d' q̃drati p: 7 $\frac{1}{2}$ cubis m: 225 quadratis, eadem est ratione differentia B D & C D quadratorum, est qua 3 positiones excedunt R v: $\frac{1}{16}$ q̃d' q̃drati p: 7 $\frac{1}{2}$ cubis m: 225 quadratis, oportuisset aũt com-

A B 30 m: $\frac{1}{2}$ pos. p: R v: $\frac{1}{4}$ q̃d. p: 30 pos. m: 900
A C 30 m: $\frac{1}{2}$ pos. m: R v: $\frac{1}{4}$ q̃d. p: 30 pos. m: 900
B D $\frac{1}{2}$ pos. p: 6 m: R v: $\frac{1}{4}$ q̃d. p: 30 pos. m: 900
C D $\frac{1}{2}$ pos. m: 6 p: R v: $\frac{1}{4}$ q̃d. p: 30 pos. m: 900

pars q̃d. A B dissim. R v: 225 q̃d. p: 27000 pos. m: 810000
pars q̃d. A C dissim. R v: $\frac{1}{16}$ q̃d' q̃d. p: 7 $\frac{1}{2}$ cub. m: 225 q̃d.
pars q̃d. B D 3 pos.
pars q̃d. C D R v: $\frac{1}{16}$ q̃d' q̃d. p: 7 $\frac{1}{2}$ cub. m: 225 q̃d.

plendo operationem, omnia quadruplicare, sed hoc uitauimus, quia si q̃druplum est æquale q̃druplo, igitur & simplum simplo, hæ igitur differentiæ equales supponuntur, & radices v: etiam sunt idẽ, igi-

igitur ex cõmuni ſententia, 3 poſitiones æquantur illi ℞ v: primæ, id eſt, ℞ v: 225 quadratorum p: 27000 poſitionibus m: 810000, igitur 216 quadrata p: 27000 poſitionibus æquantur 810000, & 1 q̄d. p: 125 poſitionibus, æquabit 3750, & res erit ℞ 7656 $\frac{1}{4}$ m: 62 $\frac{1}{2}$, quod eſt 25, & tanta fuit B C, unde habes alias.

QVÆSTIO XIIII.

Rurſus diſponatur trigonus A B C, orthogonius, cum perpendiculari A D, & ſint A B cum C D 29, & A C cum B D 31, queritur area, ponemus B C poſitionem, & erunt rurſus A B & A C eadem, ut in ſuperiore quæſtione, ſed caue, ne maius latus ponas ex parte maioris numeri, ut in priori, detrahe igitur A B ex 29, & A C, ex 31, & habebis quantitates, ut uides, differentia igitur quadratorum A B & A C, æqualis eſt differentiæ quadratorum B D & C D, eſt autem differentia quadratorum A B & A C, ut prius, at differentia quadratorum B D & C D, eſt ut uides, ſumpta eodem modo ut in priori quæſtione, ſed eſt ſuperatio abſoluta, non autem mutua, ut in priori quæſtione, quia igitur quadratum A B, excedit quadratum A C in differentia quadrati B D, ad quadratum C D, erit differentia quadratorum B D & C D, addita quadrato A C conſtituens quadratum A B, quare ℞ v: 225 quadratorum p: 27000 poſitionibus m: 810000, æquabitur $\frac{1}{2}$ poſitionis p: ℞ v: $\frac{1}{4}$ q̄d'q̄drati p: 30 cubis m: 900 quadratis, nam hæc ℞ v: eſt aggregatũ ex ℞ v: differentiæ q̄dratorum B D & C D, & partis quadrati A C, in qua ſuperat quadratum A B, quare ducendo partes in ſe, habebimus 675 $\frac{1}{4}$ quadrata p: 27000 poſitionibus m: $\frac{1}{4}$ q̄d'q̄drati m: 30 cubis m: 810000, æqualia ℞ v: 225 q̄d'q̄dratorum p: 27000 cubis m: 810000 quadratis, & cum duxeris partes in ſe, peruenies ad rem, quę non habent æſtimationem, & ideo ſoluenda eſt regula particulari. Volui tamen, ut intelligeres facilitatem operandi in hoc, & quæſtionem ualde difficilem, niſi Geometrico auxilio diſſoluatur, manifeſtum eſt enim quòd

A B 30 m: $\frac{1}{2}$ poſ. p: ℞ v: $\frac{1}{4}$ q̄d. p: 30 poſ. m: 900
A C 30 m: $\frac{1}{2}$ poſ. m: ℞ v: $\frac{1}{4}$ q̄d. p: 30 poſ. m: 900
B D $\frac{1}{2}$ poſ. p: 1 p: ℞ v: $\frac{1}{4}$ q̄d. p: 30 poſ. m: 900
C D $\frac{1}{2}$ poſ. m: 1 m: ℞ v: $\frac{1}{4}$ q̄d. p: 30 poſ. m: 900

pars q̄d. A B diſsim. ℞ v: 225 q̄d. p: 27000 poſ. m: 810000
pars q̄d. A C diſsim. ℞ v: $\frac{1}{16}$ q̄d'q̄d. p: 7 $\frac{1}{2}$ cub. m: 225 q̄d.
pars q̄d. B D qua ſuperat quadratum C D eſt $\frac{1}{2}$
poſ. p: ℞ v: $\frac{1}{16}$ q̄d'q̄d. p: 7 $\frac{1}{2}$ cub. m: 225 q̄d.

quòd B C est 25, ut in priore quæstione, uerum generalis debet esse solutio, latera igitur trigoni B C 25, A B 20, A C 15, A D 12, B D 16, C D 9, area igitur eius est 150.

De regula qua pluribus positionibus inuenimus ignotam quantitatem. Caput XXXIX.

REGVLA I.

HÆc regula similis est regulæ de medio, est autem talis, Cõstitue quantitates totidem in denominationibus liberis, quotus est numerus quærendarum, inde inuenies proportionem, qua inuenta, denuo pones res sub numero quantitatum inuentarũ, utq́ propositum est, perfice operationem, & habebis æquationem, qua habita, habebis rei æstimationem.

QVÆSTIO I.

Exemplum. Inuenias tres numeros proportionales, quorum quadratum primi sit æquale secundo & tertio, & quadratum tertij sit æquale quadratis primi & secundi, quia igitur quadratum tertij æquale est quadratis secundi & primi, ipsum sit 1 q̃d q̃dratum, æquale 1 q̃drato p: 1, quare res, seu proportio, est ℞ v ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, igitur ponemus res 1, & ℞ v: ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, & ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, quadratum igitur primæ quantitatis, quod est 1 quadratum, æquatur secundæ & tertiæ, scilicet totidem rebus, igitur rei æstimatio, est aggregatum ex secunda & tertia, quia diuidere aliquid per unitatem, qui est numerus quadratorum, est non diuidere, igitur rei æstimatio est, ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p. $\frac{1}{2}$ p: ℞ v: ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, & secunda quantitas, est quod producitur ex hac, in ℞ v: ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, & tertia habebitur, ducendo rem quam habes in ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{2}{2}$.

1	1 pos.	1 q̃d.
1	1 q̃d.	1 q̃d q̃d.

QVÆSTIO II.

Inuenias tres numeros proportionales, quorum tertius sit æqualis secũdo & primo, & quadratũ primi, sit æquale aggregato secundi & tertij, pones primum quadratũ, secundum rem, tertium unitatem, & quia tertius, æqualis est secundo & primo, igitur 1 quadratum, æquatur 1 rei p: 1, & proportio erit ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, partes igitur erunt, 1 positio, & positiones ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, & positiones 1 $\frac{1}{2}$ p: ℞ 1 $\frac{1}{4}$, & quia quadratũ primi æquale est aggregato secundi & tertij, igitur 1 quadratum æquatur positionibus ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$ p: 1 $\frac{1}{2}$ p: ℞ 1 $\frac{1}{4}$, quare rei æstimatio erit ℞ 5 p: 2, & partes ut uides.

℞ 5	p:	2
3 $\frac{1}{2}$	p:	℞ 11 $\frac{1}{4}$
℞ 31 $\frac{1}{4}$	p:	5 $\frac{1}{2}$

QVÆSTIO III.

Inuenias quatuor quantitates proportionales, quarum quadratum quartæ, æquale ſit quadratis primæ, & ſecundæ, & quantitates iunctæ ſimul, faciant 10, capiam 1, rem, quadratum & cubum, igitur q̃d'cubus, ęquatur 1 quadrato p: 1, quare res ualet ex capitulo deriuatiuorũ, ℞ v^{ma}: ℞ v: cubicæ $\frac{1}{2}$ p: ℞ $\frac{23}{108}$ p: ℞ v: cubica $\frac{1}{2}$ m: ℞ $\frac{23}{108}$, igitur poſita prima unitate, hæc eſt ſecunda quantitas, & tertia erit quadratum huius, ſcilicet ℞ v cubica $\frac{1}{2}$ p: ℞ $\frac{23}{108}$ p: ℞ v: cubica $\frac{1}{2}$ m: ℞ $\frac{23}{108}$, quarta erit cubus ſecundæ ſeu proportiõis, inde iunctis quatuor quantitatibus ſcilicet unitate, re, quadrato, & cubo, & diuiſo 10 per aggregatum, exibit prima quantitas, qua ducta in rem habebimus ſecundam, hac denuo, ducta in rem, habebimus tertiam, qua ducta per rem, habebimus quartam.

1	1 poſ.	1 q̃d.	1 cub.
1	1 q̃d.	—	1 cub'q̃d.

QVÆSTIO IIII.

Inuenias quatuor quantitates continue proportionales, quarum quadratum quartæ, æquale ſit quadratis primæ & tertiæ, & aggregatum earum ſit 10, capiam ut in præcedente 1, rem, quadratum, cubũ, erit igitur cu'q̃dratum æqualis q̃d'q̃drato p: 1, quare ex capitulo deriuatiuorũ, rei æſtimatio eſt ℞ v^{ma}: ℞ v: cubicæ $\frac{29}{54}$ p: ℞ $\frac{31}{108}$ p: $\frac{1}{3}$ p: ℞ v: cubica $\frac{29}{54}$ m: ℞ $\frac{31}{108}$, & huius q̃dratũ, quod eſt idem, abiecta ℞ v^{ma}: eſt tertia quantitas, inde ductis inuicem ſecunda & tertia, uel ſecunda ad ſuum cubum, uel tertia ad quadratum, & addita unitate conſurgit quarta, quibus quatuor quantitatibus iunctis, ſi per eas diuiſeris 10, habebis primam quæſitarum, qua ducta per ſecundam, & tertiam, & quartam, præcedentium, habebis ſecundam & tertiam & quartam quantitatem quas querebas.

REGVLA II.

2 Alia eſt regula nobilior præcedente, & eſt Ludouici de Ferrarijs, qui eam me rogante inuenit, & per eam habemus omnes ęſtimationes fermè capitulorum q̃d' q̃drati & quadrati rerum, & numeri, uel q̃d' quadrati cubi, quadrati & numeri, & ego ponam ea per ordinem, hoc modo ut uides.

1 q̃d'q̃d. æquale q̃d. rebus & numero
2 q̃d'q̃d. æquale q̃d. cubis & numero
3 q̃d'q̃d. æquale cubis & numero
4 q̃d'q̃d. æquale rebus & numero
5 q̃d'q̃d. cum cubis æqualia q̃d. & numero
6 q̃d'q̃d. cum rebus æqualia q̃d. & numero

7 q̃d'q̃d.

7 q̄d'q̄d. cum cubis æqualia numero
8 q̄d'q̄d. cum rebus æqualia numero
9 q̄d'q̄d. cum q̄d. æqualia cub. & numero
10 q̄d'q̄d. cum q̄d. æqualia rebus & numero
11 q̄d q̄d. cum q̄d. & rebus æqualia numero
12 q̄d'q̄d. cum q̄d. & cubis æqualia numero
13 q̄d'q̄d. cum q̄d. & numero æqualia cubis
14 q̄d'q̄d. cum q̄d. & numero æqualia rebus
15 q̄d'q̄d. cum numero æqualia cubis & q̄d.
16 q̄d'q̄d. cum numero æqualia cubis
17 q̄d'q̄d. cum numero æqualia rebus & q̄d.
18 q̄d'q̄d. cum numero æqualia rebus
19 q̄d'q̄d. cum cubis & numero æqualia q̄d.
20 q̄d'q̄d. cum rebus & numero æqualia q̄d.

In his igitur omnibus capitulis, quę quidem ſunt generaliſsima, ut reliqua omnia ſexaginta ſeptem ſuperiora, oportet reducere capitula, in quibus ingreditur cubus, ad capitula, in quibus ingreditur res ut ſeptimum ad quartum, & ſecundum ad primum, deinde quæremus demonſtrationem hoc modo.

DEMONSTRATIO.

Sit quadratum A F, diuiſum in duo quadrata A D & D F, & duo 3
ſupplementa D C & D E, & uelim addere gnomonem K F G circūcirca, ut remaneat quadratum totum A H, dico quòd talis gnomo, conſtabit ex duplo G C additæ lineæ, in C A, cum quadrato G C, nam F G conſtat ex G C in C F, ex diffinitione data in initio ſecundi elementorum, et C F eſt æqualis C A, ex diffinitione quadrati, & per 44ᵃᵐ primi elementorum, K F eſt æqualis F G, igitur duæ ſuperficies G F & F K, conſtant ex G C, in duplum C A, & quadratū G C eſt F H, ex corrolario quartæ ſecundi elementorū, igitur patet propoſitum, ſi igitur A D ſit 1 q̄d'q̄dᵐ & C D ac D E, 3 quadrata, & D F 9, erunt B A 1 quadratum, & B C 3 neceſſario, cum igitur uoluerimus addere q̄drata aliqua, ad D C & D E, & fuerint C L & K M, erit ad cōplendum quadratum totum neceſſaria ſuperficies L N M, quæ ut demonſtratum eſt, conſtat ex quadrato G C numeri quadratorum dimidiati,

T nam

nam C L est superficies ex G C in A B, ut ostensum est, & A B est 1 q̃dratum, quia ponimus, A D 1 q̃d'q̃dratum, F L uero & M N, fiunt ex G C in C B, ex 42ª primi elementorum, quare superficies L N M, & est numerus addendus, fit ex G C in duplum C B, id est in numerum quadratorum, qui fuit 6, & G C in seipsam, id est numero quadratorum addito, & hæc demonstratio nostra est.

4 Hoc peracto, semper reduces partem q̃d'q̃drati ad R, id est addendo tantum utrique parti, ut 1 q̃d'q̃dratum cũ quadrato & numero, habeant radicem, hoc facile est, cum posueris dimidium numeri quadratorum, radicem numeri, item facies, ut denominationes extremæ sint plus, in ambabus æquationibus, nam secus, trinomium seu Binomium redactum ad trinomium, necessario careret radice.

5 Quibus iam peractis, addes tantum de quadratis, & numero uni parti, per tertiam regulam, ut idem additum alteri parti, in qua erunt res faciat trinomium habens R quadratam per positionem, & habebis numerum quadratorum, & numeri addendi utrique parti, quo habito, ab utroque extrahes R quadratam, quæ erit in una, 1 quadratum p: numero, uel m: numero, ex alia, 1 positio uel plures p: numero, uel m: numero, uel numerus m: positionibus, quare per quintum capitulum huius, habens propositum.

QVÆSTIO V.

Exemplum. Fac ex 10 tres partes proportionales, ex quarum ductu primæ in secundam, producantur 6. Hanc proponebat Ioannes Colla, & dicebat solui non posse, ego uero dicebam, eam posse solui, modum tamẽ ignorabam, donec Ferrarius eum inuenit. Pones igitur mediam 1 positionem prima erit $\frac{6}{1\ pos.}$ & tertia erit $\frac{1}{6}$ cubi, quare hæc æquantur 10, ducendo omnia in 6 positiones, habebimus 60 positiones, æquales 1 q̃d'q̃drato p: 6 quadratis p: 36, adde ex quinta regula, 6 quadrata utrique parti, habebis 1 q̃d'q̃dratum p: 12 quadratis p: 36, æqualia 6 quadratis p: 60 positionibus, nam si æqualibus æqualia addatur, tota fient æqualia, habent autem 1 q̃d'q̃dratum p: 12 quadratis p: 36, radicem & est, 1 quadratũ p: 6, quã si haberent 6 quadrata p: 60 positionib⁹ iam haberemus negocium, sed non habent, addendi igitur sunt tot quadrati & numerus idem ex utraque parte, ut in priore relinquatur trinomium habens radicem, in altero autem fiat, sit igitur numerus quadratorum

1 q̃d'q̃d. p: 6 q̃d. p: 36	æqualia 60 pos.
6 q̃d.	6 q̃d.
1 q̃d'q̃d. p: 12 q̃d. p: 36	æq̃lia 6 q̃d. p: 60 pos.
2 pos.	1 q̃d. p: 12 pos.

torum 1 positio,& quia,ut uides in figura tertiæ regulæ, C L & M K, fiunt ex duplo G C in A B,& G C est 1 positio, ponam numerum quadratorum addendorum semper 2 positiones,id est duplū G C,& quia numerus addendus ad 36, est L N M,& ideo quadratum G C cum eo quod fit ex G C duplicato in C B,seu ex G C in duplum C B,& est 12,numerus quadratorum priorum,ducam igitur 1 positionem,dimidium numeri q̄dratorum additorū,semper in numerum q̄dratorū priorū, & in se,& fient 1 q̄dratum p: 12 positionibus addenda ex alia parte, & etiam 2 positiones pro numero quadratorum, habemus igitur iterum ex communi animi sententia, quantitates infrascriptas, inuicem æquales,& utraq; habent radicem,prima ex regula tertia, sed secunda quantitas ex supposito,igitur ducta prima parte trinomij in tertiam,fit quadratum dimidiæ partis secundæ trinomij,quia igitur ex dimidio secundæ in se,fiunt 900,quadrata,& ex prima in tertiam, fiunt 2 cubi p: 30 quadratis p: 72 positionibus quadratorum,similiter erit deprimendo per quadrata, quia æqualia per æqualia diuisa,producunt æqualia,ut 2 cu. p:30 quadratis p: 72 positionibus æquantur 900,quare 1 cubus p: 15 quadratis p:36 positionibus æquantur 450.

1 q̄d'q̄d. p: 2 pos. p: 12. q̄d* p: 1 q̄d. p: 12 pos. additi numeri p: 36 æqualia.

2 pos. 6 q̄dratorū, p: 60 pos. p: 1 q̄d. p: 12 pos. numeri additi.

Sufficit igitur deducendo ad regulam,habere semper 1 cubum p: numero priorum quadratorum,addita ei quarta parte p:numero positionum tali,qualis est numerus ęquationis primus,ut si habuerimus 1 q̄d'q̄dratum p:12 quadratis p: 36, æqualia 6 quadratis p:60 positionibus,habebimus 1 cubum p: 15 quadratis p: 36 positionibus æqualia 450,dimidio quadrati dimidij numeri positionum, & si haberemus 1 q̄d'q̄dratum p: 16 quadratis p:64 æqualia 80 positionibus, haberemus 1 cubum p:20 quadratis p:64 positionibus æqualia 800, & si haberemus 1 q̄d'q̄dratum p:20 quadratis p:100,æqualia 80 positionibus,haberemus 1 cubum p:25 quadratis p: 100 positionibus æqualia 800,igitur hoc habito,in priore exemplo habuimus, 1 cub. p: 15 quadratis p: 36 positionibus æqualia 450, igitur rei æstimatio, per 17^m capitulum,est R v: cubica $287\frac{1}{2}$ p: R $80449\frac{1}{4}$, p: R v: cubica $287\frac{1}{2}$, m: R $80449\frac{1}{4}$ m: 5, hic igitur est numerus quadratorū,qui duplicatus, est addendus ex utraq; parte,quia supponuntur 2 res addendæ,& numerus addendus ex utraq; parte,ex demonstratione, est quadratum huius,cum eo quod fit ex hoc in 12,numerum quadrato-

rum, manifeſtum eſt autem, quod R quadrata primi aggregati, ſemper eſt 1 quadratum p: dimidio numeri quadratorum, abſq; alio, id eſt p: R v: cubica 287 $\frac{1}{2}$ p: R 80449 $\frac{1}{4}$ p: R v: cub. 287 $\frac{1}{2}$ m: R 80449 $\frac{1}{4}$ p: 1, & hoc quia dimidium prioris numeri quadratorum fuit 6, & in addito trinomio fuit m: 5, igitur totum fuit, ut dixi, uerũ reliqua pars, fuit quadrata 6 p: duplo huius numeri, igitur fuit numerus quadratorum R v: cubica 2300 p: R 5148752 p: R v: cubica 2300 m: R 5148752 m: 4, & numerus rerum ex ſuppoſito fuit 60, & numerus eſt (ut oſtenſum eſt) quadratum dictæ quantitatis, plus duodecuplo ipſius quantitatis, uerum quia ex ſuppoſito, ex numero quadratorum in numerum æquationis fit quadratum dimidij numeri rerum, igitur diuiſo 900 quadrato dimidij numeri rerum, per numerum quadratorum, exibit numerus, quantitates igitur ſunt hæ, ut uides, & quia latus A G eſt compoſitũ ex lateribus duorum quadratorũ A D & D H di-

quadrata R v: cubica 2300 p: R 5148752 p: R v: cubica 2300 m: R 5148752 m: 4
res 60
900
numerus R v: cubica 2300 p: R 5148752 p: R v: cubica 2300 m: R 5148752 m: 4

miſsis ſupplementis, erunt R primæ & tertiæ harum quantitatum iunctæ inuicem, R v: totius aggregati, quare R primæ & tertiæ quantitatis, æquantur 1 quadrato p: R v: cubica 287 $\frac{1}{2}$ p: R 80449 $\frac{1}{4}$ p: R v: cubica 287 $\frac{1}{2}$ m: R 80449 $\frac{1}{4}$ p: 1, ſed R primæ quantitatis, eſt numerus rerum, quia eſt R totidem quadratorum, & R tertiæ quantitatis eſt numerus, quia tertia quantitas eſt numerus, habemus igitur 1 quadratum p: numero, æqualia rebus & numero, minue minorem numerum de maiore, accipiendo R, id eſt accipiendo R denominatoris & numeratoris, habebis 1 quadratum p: hoc numero toto, m: numero infraſcripto æq̃lia numero rerũ, huic ſcilicet, R uniuerſaliſsima R v: cu-

R v: cubica 287 $\frac{1}{2}$ p: R 80449 $\frac{1}{2}$ p: R v cubica 287 $\frac{1}{2}$ m: R 80449 $\frac{1}{4}$ p: 4
30
R v: m: R v: cu. 2300 p: R 5148752 p: R v: cu. 2300 m: R 5148752 m: 4

bicæ 2300 p: R 5148752 p: R v: cubica 2300 m: R 5148752 m: 4, nec refert, quod numerus ille ſit compoſitus ex p: & m: nam tantum refert dicere, 1 quadratum p: 8, æquatur 6 rebus, quantum dicere 1 quadratum p: 10 m: 2, æquatur 6 rebus, ſequere igitur capitulum quintum, de quadrato & numero, æqualibus rebus, ducendo dimidium numeri rerum in ſe, & auferendo numerum æquationis, inde reſidui ſumendo R uniuerſaliſsimam, quam addes dimidio numeri re-

ri rerum, & habebis rem quæ fuit media quantitatum proportionalium quæsitorum.

QVÆSTIO VI.

Inuenias numerum, qui sit æqualis radici suæ quadratæ, & duabus radicibus cubicis pariter acceptis, dices igitur si talis numerus fuerit cu'quadratum radix sua quadrata necessario est 1 cubus, & duæ radices cubicæ sunt 2 q̃d. igitur 1 cu'q̃dratum, æquabitur 1 cubo p: 2 q̃dratis, deducendo igitur ad inferiores denominationes per q̃d. erit 1 q̃d'q̃dratum æquale 1 positioni p:2, posui aūt 2 radicibus cubicis, quia cum regula sit generalis, hoc tamē modo dupliciter solui potest, ut patebit. Namq; si 1 q̃d'q̃dratum æquatur 1 positioni p:2, igitur 1 q̃d'q̃dratum m:1 æquabitur 1 positioni p:1, nam ab æqualibus æqualia auferuntur, diuide igitur ambo hæc, per 1 positionem p:1, communem diuisorem, habebis 1 cubum m:1 q̃drato p:1 positione m:1, æqualia 1, igitur 1 cubus p: 1 positione, æquatur 1 quadrato p:2, igitur ex 18° capitulo, rei æstimatio est R v:cubica R $\frac{2241}{2916}$ p: $\frac{47}{54}$ m: R v:cub. R $\frac{2241}{2916}$ m: $\frac{47}{54}$ p: $\frac{1}{3}$, & cu'q̃dratū huius est numerus quæsitus, cuius R quadrata, & 2 radices cubicæ sunt illi æquales, & tales radices sunt duplum quadrati huius quantitatis cum suo cubo.

1 q̃d'q̃d. m:	1
1 pos. p:	1
1 pos. p:	1
1 cu. m: 1 q̃d. p: 1 pos. m:	1
	1

At regula generali sic faciemus quia enim 1 q̃d'q̃dratum æquatur 1 positioni p:2, addemus ad utramq; partem, 2 positiones quadratorum, cui subscripsimus q̃d. ut intelligas non esse ex genere priorum denominationum, sed esse positiōes quadratorū, igitur numerus addendus, est 1 quadratum numeri q̃dratorum, & hoc est, ut in tertia regula huius capituli, quadratum D F, nam hic additio supplementorum est ut D C, A C, D E, ad quadratū simplex A D, igitur sufficit addere quadratū D F, absq; additione superficierum F L & M N, quæ erant necessariæ in exemplo quintæ quæstionis, quia igitur additis 2 positionibus p: 1 quadrato numeri quadratorum, ad 1 positionem p: 2, fit totum 2 positiones numeri q̃dratorum p: 1 pos. p: 2, p: 1 quadrato numeri quadratorum, & hoc habet radicem, oportet ut quadratum dimidij mediæ quantitatis, quæ est 1 positio, æque-

1 q̃d'q̃d. p:2 pos. p: 1 q̃d.
numeri q̃d. numeri q̃d.
2 pos. p: 1 pos. p: 2 p: 1 q̃d.
numeri q̃d. numeri q̃d.

$\frac{1}{4}$ q̃d. 4 pos. p:2 cub.
numeri q̃d.

$\frac{1}{4}$ æquatur 2 cu. p:4 pos.
$\frac{1}{8}$ æq̃tur 1 cu. p:2 pos.

tur ductui extremorum, igitur $\frac{1}{4}$ quadrati, æquabitur quadrato, 2 cu borum p: 4 positionibus numeri prioris, quare abiectis quadratis utrinq;, fiet $\frac{1}{4}$ æqualis 2 cubis p: 4 positionibus, & $\frac{1}{8}$ ęqualis 1 cubo p: 2 positionibus, quare rei æstimatio est ℞ v: cubica ℞ $\frac{2075}{6912}$ p: $\frac{1}{16}$ m: ℞ v: cubica ℞ $\frac{2075}{6912}$ m: $\frac{1}{16}$, hic igitur est numerus quadratorum addendus utriq; parti, & duplicatur, & quadratum huius erit numerus addendus ad utramq; partẽ, & gratia clarioris intelligentię apposui hic.

Prima 1 q̃d'q̃d. p: q̃d. ℞ v: cu. ℞ 19 $\frac{23}{2075}$ p: $\frac{1}{2}$ m: ℞ v: cu. ℞ 19 $\frac{23}{2075}$ m: $\frac{1}{2}$ p: numero ℞ v: cu. $\frac{1051}{3456}$ p: ℞ $\frac{2075}{442368}$ p: ℞ v: cu. $\frac{1051}{3456}$ m: ℞ $\frac{2075}{442368}$ m: 1 $\frac{1}{3}$.

Secunda q̃d. ℞ v: cu. ℞ 19 $\frac{23}{2075}$ p: $\frac{1}{2}$ m: ℞ v: cu. ℞ 19 $\frac{23}{2075}$ m: $\frac{1}{2}$ p: 1 pos. p: numero ℞ v: cu. $\frac{1051}{3456}$ p: ℞ $\frac{2075}{442368}$ p: ℞ v: cu. $\frac{1051}{3456}$ m: ℞ $\frac{2075}{442368}$ p: $\frac{2}{3}$

Manifestum est igitur, quod ℞ primi, est 1 q̃d. p: ℞ v: cubica ℞ $\frac{2075}{6912}$ p: $\frac{1}{16}$ m: ℞ v: cubica ℞ $\frac{2075}{6912}$ m: $\frac{1}{16}$, & radix secundi, est res ℞ v^{ma} ℞ v: cubicæ ℞ 19 $\frac{23}{2071}$ p: $\frac{1}{2}$ m: ℞ v: cu. ℞ 19 $\frac{23}{2075}$ m: $\frac{1}{2}$ p: numero ℞ v^{ma} ℞ v: cubicæ $\frac{1051}{3456}$ p: ℞ $\frac{2075}{442368}$ p: ℞ v: cu. $\frac{1051}{3456}$ m: ℞ $\frac{2075}{442368}$ p: $\frac{2}{3}$ & hoc, ut dixi, q̃a latus A D q̃drati, cõponitur ex A B & B C, lateribus q̃dratorũ extremorũ, absq; cõmemoratione supplementorum. Manifestum est etiam, quòd numerus, qui est cũ 1 q̃d. est minor numero qui est cũ rebus, igitur habebimus 1 q̃dratũ ęq̃le rebus ℞ v^{ma} ℞ v: cubicæ ℞ 19 $\frac{23}{2075}$ p: $\frac{1}{2}$ m: ℞ v: cu^{ca} ℞ 19 $\frac{23}{2075}$ m: $\frac{1}{2}$ p: numero, hoc ℞ v^{ma} ℞ v: cubicę $\frac{1051}{3456}$ p: ℞ $\frac{2075}{442368}$ p: ℞ v: cu. $\frac{1051}{3456}$ m: ℞ $\frac{2075}{442368}$ p: $\frac{2}{3}$ m: ℞ v: cu. ℞ $\frac{2075}{6912}$ p: $\frac{1}{16}$ m: ℞ v: cu. ℞ $\frac{2075}{6912}$ m: $\frac{1}{16}$. Quare ducemus dimidium numeri rerum in se, & est, ut ducamus totum in se, & fit idem, dempta ℞ v^{ma}, deinde accipiemus quartam partem producti, & est dimidium ultimæ ℞ v: quæ est m: supra positæ, ideo addita, relinquetur numerus totus compositus ℞ v^{ma} ℞ cu. v: $\frac{1051}{3456}$ p: ℞ $\frac{2075}{442368}$ p: ℞ v: cub. $\frac{1051}{3456}$ m: ℞ $\frac{2075}{442368}$ p: $\frac{2}{3}$ m: ℞ v: cu. ℞ $\frac{2075}{442368}$ p: $\frac{1}{128}$ m: ℞ v: cu. ℞ $\frac{2075}{442368}$ m: $\frac{1}{128}$, & radix huius totius v^{ma}, addita dimidio numeri rerũ, id est huic numero ℞ v^{ma} ℞ v: cubicæ ℞ $\frac{2075}{442368}$ p: $\frac{1}{128}$ m: ℞ v: cu. ℞ $\frac{2075}{442368}$ m: $\frac{1}{128}$, constituit rem.

Et si dixisset, quòd numerus propositus ęquaretur radici quadratæ & cubicæ pariter acceptis, non potuisset solui, nisi hoc secundo modo, per regulam generalem. Deducere autem æstimationes æquales ad idem, ut primam æstimationem ad secundam, iam te docui in libro quantitatum irrationalium, quamuis sit difficillima operatio, & ideo complementum in his operationibus, est quasi extremum, ad quod peruenit perfectio humani intellectus, uel potius imaginationis, in hoc enĩ cognosces illorũ differentiã.

QVÆ SE

Qvæstio vii.

Si quis igitur dicat, inuenias numero qui ductus in R cubicam suam p:6, faciat 64, dices igitur, posito eo numero 1 cubo, habebimus 1 q̄d'q̄dratum p:6 cubis æqualia 64, quare per septimam transmutandi regulam septimi capituli huius habebimus 1 q̄d'q̄d. æquale 6 rebus p:4, unde habita æstimatione ex hoc capitulo per nonam regulam eiusdem capituli, habebimus intentum. Et quibusdam adeo uidebuntur difficiles hæ operationes, ut uix eas ueras esse credant, nos autem ostendimus modum, quo quantitates istæ irrationales æquiualentes numeris, ad numeros reducantur, & dedimus demonstratioñe utramque, & Geometricam à causa, & Arithmeticam ab effectu.

Qvæstio viii.

Fac ex 6 tres partes proportionales, quarum quadrata primæ & secundæ iuncta simul faciant 4, ponemus primam 1 positionem, quadratum eius est 1 quadratum, residuum igitur ad 4, est quadratum secundæ quantitatis, id est 4 m:1 quadrato, huius radicem, & 1 positionem detrahe ex 6, habebis tertiam quantitatem, ut uides, quare ducta prima in tertiã, habebis 6 positiones m:1 quadrato m:R v:4 quadratorũ m:1 q̄d'q̄d° equalia 4 m:1 q̄d q̄drato secundæ, abijce 1 q̄dratum m:ex partibus, habebis 4 equalia 6 positionibus m:R v:4 quad. m:1 q̄d'q̄drato, quare 6 positiones m:4 æquantur R v:4 quadratorum m:1 q̄d'q̄drato, quare quadrata horum etiam æqualia sunt, à quibus abijce 4 quadrata cõmunia, ex utraque parte, habebis tandem 32 quadrata p:16 p:1 q̄d'q̄drato, æqualia 48 positionibus, quare adden do 240 utrique parti, id est residuum quadrati dimidij numeri quadratorum, habebis 1 q̄d'q̄dratum p:32 quadratis p:256, æqualia 48 positionibus p:240, addes igitur 2 positiones quadratorum p:1 quadrato p:32 positionibus numeri quadratorum utrique parti, prima igitur pars habent radicem necessario, & quia uolumus secundam etiam habere, quæ est 2 positiones quadratorum p:48 positionibus, ex prioribus

1 pos. | v:R 4 m:1 q̄d. | 6 m:1 pos. m:R v:4 m:1 q̄d.
6 pos. m:1 q̄d. m:R v:4 q̄d. m:1 q̄d'q̄d.
4 | 6 pos. m:R v: 4 quad. m: 1 q̄d'q̄d.
6 pos. m:4 æqual. R v:4 quad. m:1 q̄d'q̄d.
36 quad. p:16 m:48 pos. æquantur 4 quad. m:1 q̄d'q̄d.
32 quad. p:16 p:1 q̄d'q̄d. æqualia 48 pos.
1 q̄d q̄d. p:32 quad. p:256 æqualia 48 pos. p:240

bus p: 1 quadrato p: 32 positionibus numeri quadratorum p: 240, ducemus primam partem trinomij in tertiam ut uides, & dimidium secundæ in se, & fient 576 quadrata æqualia 2 cub. p: 64 quadratis p: 480 pos. quadratorũ igitur 288 æquantur 1 cubo p: 32 quadratis, p: pos. 240, quare per 17 capitulum huius, habebimus 1 cubum æqualẽ 101 $\frac{1}{3}$ rerum p: 420 $\frac{16}{27}$, inde habita huius ęstimatione per suum capitulum, minue 10 $\frac{2}{3}$, tertiam partem numeri quadratorum, ut in eo 17° capitulo habes, & consurgit rei fictæ æstimatio, habebis igitur 1 quadratũ p: 16 p: dicta æstimatione, ex una parte, æqualia rebus quæ sunt ℞ dupli æstimationis inuentæ p: ℞ aggregati ex quadrato dictæ æstimationis, & eadem ęstimatione ducta per 32, & 240 numero addito, hoc autem ut liquet, est minus priore numero, quia si loco 240 adderentur 256, essent æquales, igitur 1 quadratum p: æstimatione inuenta p: 16 m: ℞ v: illa trium quantitatum, id est quadrati æstimationis cum eadem ducta per 32, & cum 240 tanquam uno numero, æquantur rebus quæ sunt secundum radicem dupli æstimationis inuentæ, quod est propositum.

576 | quad.
2 pos. p: 48 pos. p: 1 q̄d. p: 32 pos. p: 240
quad. numeri quad.
2 cub. p: 64 quad. p: 480 pos. | q̄d.

QVÆSTIO IX.

Inuenias numerum, cuius q̄d'q̄dratum, cum quadruplo sui, & 8 ęquetur decuplo sui quadrati, dicemus igitur 1 q̄d'q̄dratum p: 4 pos. p: 8, æquantur 10 quadratis. Quare semper positiones dabimus quadratis, & auferemus à q̄d'q̄drato, & habebimus 1 q̄d'q̄dratũ p: 8, æquale 20 quadratis m: 4 positionibus, & quia uidemus numerum quadratorum esse magnum, & rerum paruũ, ideo conabimur minuere numerum quadratorum potius, quàm augere, & faciemus ut diminutio sit ex utraque parte 2 quad. nam à minori imò à 2 quadratis semper fermè est incipiendũ, quia non oportet ut uenias ad m: quad. ex parte rerum, quia sic non haberent radicem, subductis igitur 2 quadratis ex utraque parte, habebis

1 q̄d'q̄d. p: 4 pos. p: 8
10 q̄d.
1 q̄d'q̄d. p: 8 | 10 q̄d. m: 4 pos.
1 q̄d'q̄d. m: 2 q̄d. p: 8
8 q̄d. m: 4 pos.
1 q̄d'q̄d. m: 2 q̄d. p: 1
8 q̄d. m: 4 pos. m: 7
2 pos. | 1 q̄d. p: 2 pos.
1 q̄d'q̄d: m: 2 pos. m: 2
q̄d. p: 1 q̄d. p: 2 pos. p: 1
8 q̄d. m: 2 pos. q̄d. m: 4
pos. p: 1 q̄d. p: 2 pos. m: 7

8 m:2 pos. q̃d. | 4 pos. | 1 q̃d. p:2 pos. m:7
4 quad. | 8 m:2 pos.
8 q̃d. p:16 pos. m:56 m:2 cu. m:4 quad. p:14 pos. quad.
4 quad. p:30 pos. | 60 p:2 cub.
1 cub. p:30 æquatur 2 quad. p:15 pos.
pos. 2

habebis 1 q̃d'q̃dratum m:2 quadratis p:8, æqualia 8 quadratis m:4 positionibus, clarum est aũt, quòd si 1 q̃d'q̃dratum m: 2 quadratis debet habere radicem, oportet ut numerꝰ sit p:1, sed erat p:8, igitur oportebit auferre 7 ex utraq; parte, habebimus igitur 1 q̃d'q̃dratum m:2 quadratis p:1, æquale 8 quadratis m:4 positionibus m:7, addemus igitur per m: ut dictum est, 2 positiones quadratorum ad reliqua 2 q̃drata m: ex regula, & addemus per p: ut in eadẽ, ad numerum 1 q̃dratũ p:2 positionibus ex utraq; parte, quare habebimus partes æq̃les, quæ enim adduntur & minuuntur sunt æq̃lia, igitur 8 m:2 positionibus quadratorum m:4 positionibus, p:1 quadrato p:2 positionibus m:7 numeri, habent radicem, multiplicando igitur primam partem, quæ est 8 m:2 positionibus quadratorum, in tertiam, quæ est 1 quadratum p:2 positionibus m:7, fit illud quod uides à latere, pro numero quadratorum, & hoc æquale esse debet 4 quadratis, qui est numerus productus, ex dimidio mediæ partis in se, quare abijciendo quad. utrinq;, fiet illud multinomium, æquale 4, quare tandem reductis partibus ad suas consimiles erunt 2 cubi p:60, æquales 4 quadratis p:30 positionibus, & 1 cubus p:30, æqualia 2 quadratis p:15 positionibus, quare res ualet 2, uel per capitulum, uel etiam solo sensu experiendo.

Circa quod notanda sunt tria. Primum, quod reduxi rem ad experimentum in numeris, ut uideres ueritatem rei facilius, stultum est enim semper difficultatem addere difficultati, secundum, quod 1 cubus p:30 ęqualis 2 q̃d. p:15 rebus, habet aliam rei ęstimationẽ quàm 2, quæ cognita est ex suo capitulo, sed pro nunc ne operatio longior euadat, eam relinquimus. Tertium notandum est, quod tu uides, demonstrationem sic tenere in m: sicut in p: & quod numerus semper est addendus necessario, quia consurgit ex quadrato numeri quadratorum cum numero quadratorum priorum, seu quadrata sint addenda seu minuenda, ducto in dimidium numeri quadratorum minuendorũ. Hoc stante, diximus quod rei æstimatio est 2, & addendæ sunt 2 res per m: quadratorũ, igitur minuemus 4 quadrata ex utraq; parte, habebimus igitur 1 q̃d'q̃dratum m:6 q̃dratis p:1, æqualia 4 qua- Not^m.

dratis m:4 positionibus m:7, pro numero autem addendus est quadratus numeri dimidij quadratorum detractorum, & hoc dimidium est 2, quadratũ cuius est 4, & similiter productum ex numero priorum quadratorum in rei æstimationem, quod productum est 4, igitur ademus 8 utriq; parti, & fient tandem ut uides, 1 q̃d'q̃dratum m:6 q̃dratis p:9, ęqualia 4 q̃dratis m:4 positionibus p:1, manifestum est autem quod ambo hæc habent radices duplices, ut uides, sed facta reductione ueniunt necessario ad duo capitula, uel 1 q̃dratum æquale 2 positionibus p:2, uel 1 quadratum p:2 positionibus æqualia 4, horũ capitulorum æstimationes sunt ℞ 3 p:1, & ℞ 5 m:1, dico igitur quòd in æstimationibus 1 q̃d'q̃drati p:4 positionibus p:8, æquantur 10 quadratis, cuius probationis experimentum habes à latere dilucidum, ut patet, non declaro autem, an facta alia positione perueniremus ut dixi, cum 1 cubus p:30, ęquabatur 2 quadratis p:15 rebus, ad alias duas æstimationes, sed si te delectat operatio, per te ipsum potes illud inquirere.

1 q̃d'q̃d. m: 2 q̃d. p: 1
m:4 quad. p:8

1 q̃d'q̃d. m:6 q̃d. p: 1
8 quad. m:4 pos. m: 7
m:4 quad. p: 8

4 q̃d. m: 4 pos. p: 1

1 q̃d'q̃d. m:6 q̃d. p: 9 —	1 quad. m: 3 3 m: 1 quad.
4 quad. m:4 quad. p: 1 —	2 pos. m:1 1 m:2 pos.
1 q̃d. æqual. 2 pos. p: 2	℞ 3 p: 1
1 q̃d. p:2 pos. æqual. 4	℞ 5 m: 1

p[a] æstimatio	2[a] æstimatio
res ℞ 3 p: 1	res ℞ 5 m: 1
quad. 4 p: ℞ 12	quad. 6 m: ℞ 20
q̃d'q̃d. 28 p: ℞ 768	q̃d'q̃d. 56 m: ℞ 2880
4 res ℞ 48 p: 4	4 res ℞ 80 m: 4
q̃d'q̃d. ℞ 768 p: 28 p: 8	q̃d'q̃d. m: ℞ 2880 p: 56 p: 8
aggreg. ℞ 1200 p: 40	aggreg. 60 m: ℞ 2000
10 quad. 40 p: ℞ 1200	10 q̃d. 60 m: ℞ 2000

QVÆSTIO X.

Inuenias tres numeros proportionales, quorum aggregatum sit 8, & quadratum tertij, sit æquale aggregato ex quadratis primi & secundi, ponemus eos per primam regulam 1, 1 pos. 1 quad. erunt igitur quadrata 1, 1 quadratum, 1 q̃d'q̃d. igitur 1 q̃d'q̃d. æquatur 1 q̃drato p: 1, quare ex capitulo deriuatiuorum 24°, habebimus rei æstimationem ℞ V: ℞ $1\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, & tertia quantitas, est eius quadratum, scilicet ℞ $1\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, & prima fuit 1, igitur totum aggregatum est $1\frac{1}{2}$ p: ℞ $1\frac{1}{4}$

1 $\frac{1}{4}$ p: ℞ v: ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, hoc aūt non est 8, ut propositū est, dic igitur per regulam trium quantitatū, si 1 $\frac{1}{2}$ p: ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p: ℞ v: ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$ esset 8, qd esset 1 prima quātitas? duc 8 in 1, fit 8, diuide 8

1	p^a
$\frac{1}{2}$ p: ℞ 1 $\frac{1}{4}$	3^a
℞ v: ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$	2^a
1 $\frac{1}{2}$ p: ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p: ℞ v: ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$	

per 1 $\frac{1}{2}$ p: ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p: ℞ v: ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, & exit 4 p: ℞ v: ℞ 500 p: 10 m: ℞ v: ℞ 1920 p: 18, & hæc est prima quantitas, qua habita si duxeris eam per ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, habebis tertiam quantitatem, quā si duxeris denuo in primam quantitatem ultimo inuentarum, ℞ v^{ma} producti, est secunda quantitas, & ne mireris quod tertiam quantitatem præponam secundæ in operatione, quia est longe simplicior.

Quæstio xi.

Si quis dicat, inuenias numerum, qui ductus in ℞ suam cubicam m: 3, faciat 64. Pones illum 1 cubum, igitur ductus in ℞ cubicam m: 3 producit 1 q̄d'q̄dratum m: 3 cubis, æqualia 64, igitur 1 q̄d'q̄dratum m: 3 cubis, æquatur 64, dico quod possumus soluere modo septimæ quæstionis, & etiam alio modo, sine transmutatione, quo potest etiam solui septima quæstio, & facilius, sed uolui docere ambos modos, ut melius scires operari, debes igitur scire duo. Primum, quòd ut res debent semper manere ab alia parte, à qua est numerus cum quadratis, & non à parte q̄d'q̄drati, sic cubi, seu p: seu m: debent manere cū q̄d'q̄drato. Secundum, quòd ut numerus rerum nunꝗ debet uariari, sic nec numerus cuborū. Et possumus addere tertium his, scilicet, quòd ubi sunt res, peruenimus ad 1 q̄d'q̄dratum p: quad. p: numero, æqualia quad. rebus p: uel m: & numero p: sic hic peruenimus ad q̄d'q̄dratum p: quad. p: numero, æqualia q̄d'q̄d. cubis p: uel m: & quad. p: Hoc intellecto, sic soluitur quæstio, addes ad numerum 2 positiones q̄dratorū, igitur ducto eius dimidio in se, fit 1 q̄dratum numeri quadratorumquadratorū, diuiso igitur eo per 64, habes $\frac{1}{64}$ q̄d. numerū q̄d^{ti}q̄dratorū, quare uides, q̊d addidisti ad habendam radicem $\frac{1}{64}$ quad. pro numero q̄d'q̄d. & 2 positiones pro numero quad. igitur addes eadem ad 1 q̄d'q̄dratum m: 3 cubis, & habebis $\frac{1}{46}$ quadrati p: 1, pro numero q̄d'q̄d. & m: 3 cubis & 2 positionibus, pro numero quad. igitur ad hoc ut habeat radicem, oportet ut extrema inuicem ducta, producant, quantum dimidiū mediæ quantitatis in se, est autem dimidium 1 $\frac{1}{2}$ cubi, quod ductum in se, producit 2 $\frac{1}{4}$ cu'quadrata & $\frac{1}{64}$ quadrati p: 1 numeri q̄d'q̄d. in 2 positiones numeri

$\frac{1}{64}$ q̄d. p: 1 q̄d'q̄d.	m: 3 cu.	p: 2 pos. q̄d.	$\frac{1}{64}$ q̄d. q̄d'q̄d.	2 pos. q̄d.	64

meri quad. producit $\frac{1}{32}$ cubi p:2 positionibus numeri cu'quadrati, nã q̃d'q̃dratum in quadratum, producit cu'quadratum, habes igitur $\frac{1}{32}$ cubi p:2 positionibus numeri cu'q̃d. æqualia $2\frac{1}{4}$ cu'q̃dratis, igitur ut cu'q̃dratum, ad cu'q̃dratum in æqualitate, sic numerus ad numerum, quare $\frac{1}{32}$ cubi p:2 positionibus, æqualia $2\frac{1}{4}$, quare 1 cubus p:64 positionibus æqualia 72, quare rei æstimatio, p:℞ v: cubica ℞ $11005\frac{1}{27}$ p:36, m:℞ v: cubica ℞ $11005\frac{1}{27}$ m:36, & duplum huius pro q̃dratis addetur utrique parti, radix igit, ex una parte est 8 p: rebus sub numero æstimationis rei, ex alia aũt q̃drata sub numero ℞ v: $\frac{1}{64}$ q̃drati, huius æstimatiõis addito 1, m: positionibus sub numero ℞ dupli huius æstimationis.

QVÆSTIO XII.

Si quis dicat, 1 q̃d'q̃dratum p:3, æquatur 12 rebus, addes 2 positiones quadratorum, & 1 quadratum numeri quadratorum, quare sic habebit ℞ quadratam sine numero ut clarum est; igitur addemus ex alia parte pro numero quadratorum 2 positiones, & pro numero 1 quad. m:3 habebis partes ut uides, quare multiplicatis partibus, habes 2 cubos æquales 6 rebus p:36, & 1 cubum, æqualem 3 rebus p:18, & res ualet 3, igitur partes sunt ut uides, & erit 1 quadratum p:3, ℞ primæ partis, æqualis rebus ℞ 6 p: numero ℞ 6, & res quæsita erit, ℞ v: ℞ 6 m: $1\frac{1}{2}$ p: ℞ $1\frac{1}{2}$.

1 q̃d'q̃d. p:3	12 pos.		
2 pos. quad. p:1 quad. m:3			
1 q̃d'q̃d. p:2 pos. p:1 q̃d.	2 pos.	12	1 q̃d. m:3
1 q̃d'q̃d. p:6 quad. p:9	6 quad. p:12 pos. p:6		

QVÆSTIO XIII.

Inuenias numerum, cuius q̃d'q̃dratum cum duplo cubi, sit 1 p: ipso numero, igitur dices, 1 q̃d'q̃dratum p:2 cubis æquantur ad 1 positionem p:1, hic non datur locus radici subtrahendæ, nec diuisioni. Sed dices ex prima regula, inuenias tres numeros proportionales, quorum aggregatum ad aggregatum secundi & tertij eandẽ habeãt rationem, quam aggregatum secundi & tertij ad primum. Pones igitur eos 1, 1 pos. 1 quad. habebis igitur 1 q̃d'q̃dratum p:2 cubis p:1 quadrato, æqualia 1 quadrato p:1 positioni p:1, quare abiecto 1 quadrato communi, habebimus 1 q̃d'q̃dratum p:2 cubis, æqualia 1 positioni p:1, ergo iam scimus rationem quantitatum, quia uero ex aggregato in primam, fit quadratum aggregati secundæ & tertiæ, igitur tale aggregatum est diuisum secundum proportionem habentem medium & duo extrema, & eius minor portio est 1, igitur residuum (& est maior portio) est ℞ $1\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, & hoc ęquatur (ut supponitur) 1 q̃drato p:1 positione, igitur quantitates sunt ut uides.

Mediæ

Mediæ igitur quantitatis (quæ est res) 1 q̃d'q̃dratum p: 2 cubis æquantur ipsi quantitati p: 1, id est R̸ v: R̸ 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{3}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, & per hęc intelligis modos harũ regularũ, si exempla hæc diligenter cum suis operationibus animaduertas.

prima	1
2ª res	R̸ v: R̸ 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{3}{4}$ m: $\frac{1}{2}$
3ª q̃d.	R̸ 1 $\frac{1}{4}$ p: 1 m: R̸ v: R̸ 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{3}{4}$

De modis suppositionum generalium ad artem maiorem pertinentibus & regulis quæ extra ordinem sunt, ac æstimationibus diuersi generis ab his quæ dictæ sunt. Cap. XL.



CVm fuerit cubus æqualis quadratis & numero, si ab æstimatione illa detrahatur, numerus quadratorum, relinquetur æstimatio cubi & totidem quadratorum, ęqualium numero existenti in proportione eadem cum numero primæ æquationis in qua est ipsa secunda æquatio seu æstimatio ad primam æstimationem. Exemplum, cubus æquatur 2 quadratis p: 1 $\frac{17}{64}$, & æstimatio est 2 $\frac{1}{4}$, dico, quod si abijcias 2 numerum quadratorũ relinquetur $\frac{1}{4}$, æstimatio cubi & 2 quadratorum, æqualium $\frac{9}{64}$, qui numerus est in eadem proportione cum 1 $\frac{17}{64}$ numero prioris æquatiõis, in qua est $\frac{1}{4}$ æstimatio secunda, ad 2 $\frac{1}{4}$ primam æstimationem, cuius demonstratio sit hæc. pª.

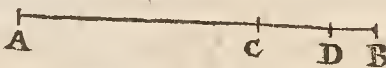
Demonstratio.

Ponatur A B æstimatio prima, & A C numerus quadratorum, & erit B C æstimatio alicuius cubi & quadratorum, secundum A C numerum æqualium alicui numero, qui sit E, ponatur uero D numerus, qui cum quadratis A B secundum numerum A C æquetur cubo A B, quia igitur cubus A B æquatur producto ex A C & C B in quadratum A B, itemq́ producto ex A C in quadratũ A B cũ numero D, erit D æqualis producto C B in A B quadratum, & simi liter cubus C B cum producto A C in quadratum C B, æquatur E numero, & æquatur etiam producto ex A B in quadratum B C, igitur productũ A B in quadratum B C, æquatur E, uerum producti B C in quadratum A B, ad productum A B in quadratum B C, ut A B ad B C ex demonstratis in septimo super Euclidem, proportio igitur D ad E, ut A B ad B C, quod erat probandum, similiter sequitur, permutando proportiones æquationum numerorum ad suas æstimationes easdem esse, cum æstimationum differentia fuerit numerus quadratorum.

2ª Cum fuerint cubus & quadrata, æqualia numero, item cubus æqualis totidem quadratis eidemq́ numero, erit proportio aggregati ex prima æstimatione & numero quadratorum, ad residuum, quod fit detracto à secunda æstimatione numero quadratorum, ut secundæ æstimationis ad primam duplicata, uelut si dicam, cubus & 3 quadrata, æquantur 20, & cubus æquatur 3 quadratis p: 20, in prima æstimatio rei est 2, in secũda est R̸ v: cubica 11 p: R̸ 120 p: R̸ v: cubica 11 m: R̸ 120 p: 1, dico quòd si addas 3 numerum quadratorũ, ad 2 primam æstimationem (& fiet 5) & minuas idem 3, ex secunda æstimatione (& fiet R̸ v: cu. 11 p: R̸ 120 p: R̸ v: cu. 11 m: R̸ 120 m: 2) quod proportio 5 ad hanc radicem, est uelut R̸ v: cubicæ 11 p: R̸ 120 p: R̸ v: cubica 11 m: R̸ 120 p: 1, æstimationis secundæ, ad 2 æstimationem primam, duplicata, cuius rei est demonstratio hæc.

DEMONSTRATIO.

Sit æstimatio prima B C, secunda A B, numerus quadratorum communis, A D, quia igitur cubus A B, æqualis est productis A D & D B in quadratum A B, & A B est numerus quadratorum, erit productum ex D B in quadratum A B, æquale numero æquationis, quare & cubo B C cum producto A D in quadratum B C, igitur quod ex B D in quadratum A B, æquale est ei, quod ex aggregato A D & C B in quadratum C B, igitur ex 34ª 11ⁱ & 7ª 6ⁱ elementorum, A D & C B, iunctorum, ad B D, uelut A B ad B C, ratio seu proportio duplicata.



3ª Cum fuerint quadrata æqualia cubo & numero, conuertetur capitulum in capitulum rerum æqualium cubo & numero, & æstimatio secunda semper est addenda uel detrahenda tertiæ parti numeri quadratorum, ut habeatur prima, & modus est, sume differentiam numeri æquationis propositi, & dupli cubi T p q̃ d. & eã pone pro numero, qui cum cubo æquatur rebus totidem, quotus est numerus, qui est tertia pars quadrati numeri quadratorum, ergo inuenta secunda æstimatione, pro habenda prima, addes eã T p q̃ d. si numerus fuit maior duplo cubi T p q̃ d. uel minues, si numerus fuit minor duplo cubi T p q̃ d. & conflatum uel residuum, est æstimatio prima.

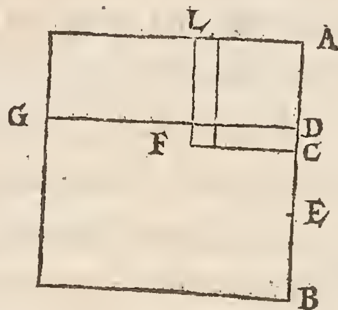
Exemplum, Cubus & 80, æquantur 9 quadratis, dupla cubum 3, qui est T p q̃ d. fit 54, differentia cuius ab 80 est 26, igitur cubus p: 26, æquabitur 27 rebus, est autem 27 tertia pars q̃drati 9, igitur æstimatio secunda est 1, quæ addita ad 3 T p q̃ d: constituit 4, æstimationẽ primã, q̃a numerus qui est 80, est maior duplo cubi T p q̃ d. quod est 54.

Aliud exemplum, Cubus p: 5, æquatur 6 quadratis, duc 6 in se fit 36,

sit 36, huius tertia pars est 12, numerus rerum, inde detrahe 5, numerū æquationis, ex 16 duplo cubi 2 тpq̃d. & relinquitur 11, igitur 1 cub. p: 11, æquatur 12 rebus, æstimatio autem est 1, detrahe igitur 1 ex 2 тpq̃d. quia numerus est minor duplo cubi тpq̃d. relinquitur æstimatio cubi p: 5 æqualis 6 quad.

DEMONSTRATIO.

Demonstratio autem huius est, ponatur A B numerus quadratorum 9, A C æstimatio rei, cuius cubus p: 80 æquatur A B ductæ in A F quadratum A C, & sit A D tertia pars A B, & similiter D E & E B & A G superficies æquidistantium laterum, & tertia pars quadrati A B ex prima 6ⁱ, quia igitur ex B A in A C, fit cubus A F p: 80, erit quod ex B C in A F 80, quod igitur ex B D in A F, 80 p: eo quod ex C D in A F, detracto igitur quod ex B D in A H, & est duplum cubi A D, fiet quod ex B D in gnomonē, 26 p: eo quod ex C D in A F, at quod ex B D in gnomonem, æquale est quadruplo C D in quadratum A H, & duplo A D in quadratum H F, eo quod lineæ B E, E D, D A, D H, & reliquæ suplementorum sunt æquales inuicem, quadruplum igitur C D in quadratum A H cum duplo A D in quadratum H F, æquatur 26 p: eo quod ex C D in F A, at ex C D in F A, fit cubus C D, & duplum A D in quadratum F H, & C D in quadratū A H semel, igitur ablato eo quod ex C D in quadratum A H semel, & ex A D in quadratum H F bis, utrinq; erit triplum C D in A H, æquale cubo C D p: 26, at quod ex C D in A H ter, ęquale est ei, quod ex C D in A G semel, cum D H sit tertia pars D G, igitur quod ex C D in A G tertiam partem quadrati A B, æquale est cubo ipsius C D p: 26.



Cum quæstionis solutio ad multitudinem denominationum peruenerit, solutio plerunq; sperari potest, nam ex mala tractatione sæpius hoc euenit, unde ad pauciores & notas denominationes deducta soluitur, & generaliter. At cum ad capitulum paucarum sed inæqualiū denominationū peruenerit, quæstionis solutio, nunq; generaliter ad cognitionem perueniet, cum semper in id incidat capitulum, quod uniuersalem æstimationis inueniendæ regulam non habet, uelut si ad capitulum Rⁱ Pⁱ, quadratorum, rerum ac numeri deuenerit. 4ª

Cum uero hoc in omnibus, tum maxime in Geometricis quæstionibus, quæ graues sunt, plurimum conferre solet, ut præuias alias, ac minus difficiles quæstiones soluas, huius libri auxilio, demum in regulas de modo solutiones has contrahes, inde illarum auxilio pedetentim 5ª

tim procedens per positionis præcepta & regulas, ad aliquod tandem horum capitulorum notorum peruenies, ex quo dilucida solutio apparebit.

6a Præter has autem æstimationes, aliæ quædam emergunt, quarum numerus est infinitus, nec ullius earum generalis est usus, uerum quæ maxime sunt frequentes, tribus modis fiunt. Aut eñ regula particulari, ut in sexto libro ostensum est. tum magis in capitulis omnibus quantitatū continue proportionalium, ut facile est experiri. Aliæ autem ex iterata regularum uel capitulorum operatione, Vel mixtione, ut cum ad quæsiti solutionem pluribus capitulis, uel regulis indigemus. Exemplum habes, præter reliqua, in quarta quæstione capituli 35i huius libri, ubi eam quæstionem ad finem deduxeris, & expressius etiam in secunda quæstione 31, capituli huius. Tertio modo habebis uarias æstimationes, cum capitula uel regulas non in numeris, sed iam uariatis æstimationibus exercueris, ut si dicam, fac ex ℞ ultimi 8 m: ℞ 2, duas partes, ex quarum ductu in radices alterius mutuo fiant numeri, qui iuncti inuicem faciant 4, operatio perueniet ad absonam quantitatem.

7a Natura producti ex partibus numeri in ℞ quadratam uel cubam uel alterius generis partis reliquæ, est de genere cubi, uel q̄d'q̄drati, excepto quod quantitas sumenda est proximior maxime, non minori. Exemplum, si quis dicat, fac ex 10 duas partes, quarum productum unius in quadratum alterius faciat 9, & postmodum uelis dicere, fac ex aliquo numero duas partes, ex quarum ductu unius in quadratum alterius, fiat 18, tunc uides quod talis productio est ex genere cubi, quia igitur, si proportio esset eadem, fieret hoc ex 20, quod est duplum 10, ut 18 est duplum 9, at quia est ex genere cubi, inueniemus duos terminos proportionales inter 10 & 20, & sunt ℞ cubica 2000 & ℞ cubica 4000, igitur numerus quæsitus est ℞ cubica 2000, nam una pars est ℞ cubica 2 alia ℞ 1458, ducta ℞ cubica 1458 in quadratum ℞ cub. 2 fit ℞ cubica 5832, quæ est 18. Dico igitur quod si dixisset, ut facias de 10 duas partes, ex quarum mutua multiplicatione in ℞ alterius fiat 12, quod hæc habet rationem cubicam, unde si diceremus, inuenias numerum ex cuius ductu uicissim partium in mutuas radices fiat 24, & uelis ex primis partibus inuenire alias, tunc inter 10 & 20 eadem ratione, qui se habent ut 9 & 18, accipies in ratione cubica duos terminos medios proportionales, & maior illorum qui est ℞ cubica 4000, est terminus quæsitus, nam una pars

9	18
10	20
℞ cu.	℞ cu.
2000	4000

pars est ℞ cubica 4, alia ℞ cubica 2916, duc uicissim in ℞ quadratam alterius fiunt ℞ cubica 5832, & ℞ cub. 216, quæ sunt 18 & 6, & hæ iunctæ faciunt 24.

Quælibet æquatio cubi æqualis rebus & numero, conuertitur in consimilem, cuius numerus rerum constat ex diuisione prioris numeri rerum per numerum æquationis, & numerus æquationis est ℞ unitatis diuisæ per numerum æquationis, ut in exemplo, cubus æquetur 6 positionibus p: 2, diuide 6 numerum positionum per 2 numerum equationis, exibit 3 numerus positionum secundæ æquationis, diuide etiam unitatem per 2 numerum æquationis, exit $\frac{1}{2}$, cuius ℞ est numerus æquationis, & ita in duobus reliquis exemplis. Inuentio autem æstimationis unius per aliam, est ualde difficilis, ueruntamen dico, quòd habita secunda æstimatione, ipsa erit ℞ numeri rerum multiplicandarum cum unitate per 1 cub. & per positiones, & numerum priorem ex alia parte, inde addes tot quadrata utrique parti, quotus est numerus, qui prouenit diuisa unitate per quadruplum quadrati eiusdem secundæ æstimationis, & habebis q̄d'q̄dratum p: cubo p: quadrato ex una parte, habentia ℞, quæ erit quad. p: pos. & ex alia quad. p: pos. p: numero, habentia similiter radicem, quæ erit positio p: numero, quare per capitulum, habebis æstimationem, ut in tertio exemplo, habes secundam rei æstimationem 1, pro habenda prima duc 1 positionem p: 1 (pro regula sumit 1) sed 1 pos. est propter quadratum æstimationis rei, quod fuit etiam 1 in 1 cubum, & 6 positiones p: 9, habebis 1 q̄d'q̄dratum p: 1 cubo, æqualia 6 quadratis p: 9 p: 15 positionibus, deinde adde utrique parti $\frac{1}{4}$ quadrati, & est quod prouenit semper diuisa unitate per quadruplum quadrati numeri positionum additarum, & habebis partes habentes ℞ quadratas, quare res est 3. 8ª

1 cub. æq̄lis 6 pos. p: 2
1 cub. æq̄lis 3 pos. p: ℞ $\frac{1}{2}$

1 cub. æq̄lis 4 pos. p: 4
1 cub. æq̄lis 1 pos. p: $\frac{1}{2}$

1 cub. æq̄lis 6 pos. p: 9
1 cub. æq̄lis $\frac{2}{3}$ pos. p: $\frac{1}{3}$

1 cub.	6 pos. p: 9
1 pos. p: 1	1 pos. p: 1
1 q̄d'q̄d. p: 1 cub.	6 q̄d. p: 15 pos. p: 9
1 q̄d'q̄d. p: 1 cu. p: $\frac{1}{4}$ q̄d.	$6\frac{1}{4}$ q̄d. p: 15 pos. p: 9
1 q̄d. p: $\frac{1}{2}$ pos.	$2\frac{1}{2}$ pos. p: 3

Quinquies exscriptus, maneat tot millibus annis.

Artis Magnæ Hiero. Cardani de Regulis Algebri, Finis.

Norimbergæ per Ioh. Petreium excusum.
Anno M. D. XLV.